Uwe
28 5 13
1

Les 5 indépendances

Cadre: $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$

X_1, X_2 sont indépendants si $P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$

Généralisation:

Considérons $j_i : B_i \to (A, \phi)$ $*$-algèbres unifères.
$\phi(1) = 1$, $\phi(a^* a) \geq 0$.

j_1 et j_2 sont indépendants si $\phi \circ (j_1 \sqcup j_2) = (\phi \circ j_1) \overset{?}{\bullet} (\phi \circ j_2)$ sur $B_1 \sqcup B_2$

Où $\sqcup$ est le produit libre des algèbres:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d] \arrow[drr, "j_1"] & & \\ B_1 \amalg B_2 \arrow[rr] & & A \\ B_2 \arrow[urr, "j_2"'] & & \end{tikzcd}$$

coproduit de la catégorie des $*$-algèbres unifères avec $\mathrm{Mor}(A,B) = \{f : A \to B$ $*$-homomorphisme unital$\}$

N.B.: $j_1 \sqcup j_2$ va dans A !

Q: quels produits $\bullet$ peut-on prendre?

On peut aussi considérer $j_1 \amalg j_2 : B_1 \amalg B_2 \to A_1 \amalg A_2$.

Condition à imposer pour un "produit universel" on veut que

- $\bullet$ applique $S(B_1) \times S(B_2)$ dans $S(B_1 \amalg B_2)$

l'associativité $(B_1 \amalg B_2) \amalg B_3 \cong B_1 \amalg (B_2 \amalg B_3)$ a lieu, c'est-à-dire que $\exists\, \alpha_{B_1, B_2, B_3} : B_1 \amalg (B_2 \amalg B_3) \to (B_1 \amalg B_2) \amalg B_3$ et on veut que $\varphi_1 \bullet (\varphi_2 \bullet \varphi_3) = (\varphi_1 \bullet \varphi_2) \bullet \varphi_3 \circ \alpha_{B_1, B_2, B_3}$

cf. MacLane: Categories for the working mathematician.

On veut aussi que $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ i_j = \varphi_j$ pour $j = 1, 2$, où $i_1 : B_1 \to B_1 \amalg B_2$, $i_2 : B_2 \to B_1 \amalg B_2$

Fonctorialité: $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ (j_1 \amalg j_2) = (\varphi_1 \circ j_1) \bullet (\varphi_2 \circ j_2)$

Cela veut dire que $((B_1, \varphi_1), (B_2, \varphi_2)) \longmapsto (B_1 \amalg B_2, \varphi_1 \bullet \varphi_2)$ est un bifoncteur

Ici, $*\text{-}\mathrm{Alg}_1^{\mathrm{Prob}}$ = catégorie des espaces de probabilité $*$-algébrique:

$\mathrm{Ob}(*\text{-}\mathrm{Alg}_1^{\mathrm{Prob}}) = \{(A, \phi) : A$ $*$-algèbre unifère, $\phi : A \to \mathbb{C}$ état$\}$

$\mathrm{Mor}(*\text{-}\mathrm{Alg}_1^{\mathrm{Prob}}) = \{ j : (B, \psi) \to (A, \varphi) : j$ $*$-homomorphisme, $j(1_B) = 1_A$, $\phi \circ j = \psi \}$

En fait, on peut demander que $\bullet$ soit un produit tensoriel.

Ici, $\mathbb{C}$ est initial dans $*\text{-}Alg_1^{Prob}$: $\mathbb{C} \amalg A \cong A \cong A \amalg \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est $(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{C}})$ avec $: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'unique état sur $\mathbb{C}$.

Ici, $(\varphi \bullet \delta_{\mathbb{C}}) \circ \rho = \varphi = (\delta_{\mathbb{C}} \bullet \varphi) \circ \lambda$ et $\mathbb{C} \amalg B \cong B \cong B \amalg \mathbb{C}$, c'est-à-dire que λ_B, ρ_B, $\lambda_B : \mathbb{C} \amalg B \xleftarrow{\cong} B$

$\rho_B : B \amalg \mathbb{C} \xleftarrow{\cong} B$

La condition sur les lois marginales exprime que $i_1 : B_1 \longrightarrow B_1 \amalg B_2$, $i_2 : B_2 \longrightarrow B_1 \amalg B_2$ sont des morphismes de la catégorie $*\text{-}Alg_1 Prob$.

On peut imposer de plus une condition de commutativité car $B_1 \amalg B_2 \cong B_2 \amalg B_1$, c'est-à-dire que $c_{B_1,B_2} : B_2 \amalg B_1 \longrightarrow B_1 \amalg B_2$ satisfait $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ c_{B_1,B_2} = \varphi_2 \bullet \varphi_1$; on a $\varphi_1 \bullet \varphi_2 \cong \varphi_2 \bullet \varphi_1$.

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B_1 \amalg B_2 \arrow[rr, shift left, "\exists!"] & & B_2 \amalg B_1 \arrow[ll, shift left, "\exists!"] \\ & B_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et $\rightleftarrows$ est l'identité.

<u>Théorème</u> : On a la normalisation suivante : $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(b_1 b_2) = (\varphi_1 \bullet \varphi_2)(b_2 b_1) = \varphi_1(b_1)\varphi_2(b_2)$ pour $b_1 \in B_1$ et $b_2 \in B_2$.

Norm[alisation] + Associativité + Fonctorialité + Lois marginales ne sont satisfaits que pour $\boxed{\text{le produit tensoriel}}$: $\varphi_1 \bullet \varphi_2 (b_1 \cdots b_r) = \varphi_1\left(\overrightarrow{\prod_{i:\varepsilon_i=1}} b_i\right) \varphi_2\left(\overrightarrow{\prod_{i:\varepsilon_i=2}} b_i\right)$

$b_i \in B_{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$, $\varepsilon_i \in \{1,2\}$

Donc $\varphi_1 \bullet \varphi_2 = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \tau$ où τ est l'unique homomorphisme

c'est-à-dire que $B_1 \otimes B_2 \cong B_1 \amalg B_2 \big/ \{ab = ba : a \in B_1, b \in B_2\}$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d] \arrow[dr, "b \mapsto b\otimes 1"] & \\ B_1 \amalg B_2 \arrow[r, "\tau"] & B_1 \otimes B_2 \\ B_2 \arrow[u] \arrow[ur, "b \mapsto 1 \otimes b"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Le produit libre :}}$ $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ est caractérisé par :

$\forall n \geq 1$ $\forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,2\}^n$ avec $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \dots \neq \varepsilon_n$ $\forall a_1 \in B_{\varepsilon_1} \dots \forall a_n \in B_{\varepsilon_n}$ avec $\varphi_{\varepsilon_i}(a_i) = 0$ on a $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(a_1 \dots a_n) = 0$

On a alors $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(a_1 \dots a_n) = \sum_{I \subsetneq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-\#I+1} (\varphi_1 \bullet \varphi_2)\left(\overrightarrow{\prod_{k \in I}} a_k\right) \prod_{k \notin I} \varphi_{\varepsilon_k}(a_k)$ lorsque les éléments ne sont pas centrés.

Dém : $0 = \varphi(a_1^0 \dots a_n^0)$ où $a_i^0 = a_i - \varphi(a_i)1$

$= \varphi\left((a_1 - \varphi(a_1)1) \dots (a_n - \varphi(a_n)1)\right)$.

et il suffit de développer ce produit ! le premier terme est $\varphi(a_1 \dots a_n)$ qu'on cherche à calculer...

Pour avoir plus de produits, il faut considérer les algèbres non unifères et faire $A = \mathbb{C}1 \oplus A_0$ avec A_0 une sous-algèbre de A.

Ces produits peuvent aussi être définis sur les C^*-algèbres et les algèbres de v.N.