

Le 5 independance

Une
28 5 13

Catégorie $X_i : (P, \sigma, P) \rightarrow (E_i, \xi_i)$

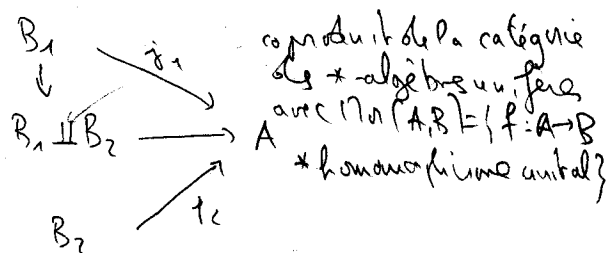
X_1, X_2 sont indépendants si $P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$

Généralisation:

Considérons $f_i : B_i \rightarrow (A, \phi)$ $\ast$ -algèbres unitaires.
 $\phi(1) = 1, \phi(a^*a) \geq 0$

f_1 et f_2 sont indépendants si $\phi \circ (f_1 \sqcup f_2) = (\phi \circ f_1) \bullet (\phi \circ f_2)$ sur $B_1 \sqcup B_2$

Où $\sqcup$ est le produit libre des algèbres:



v.B.: $f_1 \sqcup f_2$ va dans A !

Q: quels produits $\bullet$ peut-on prendre?

On peut aussi considérer $f_1 \sqcup f_2 : B_1 \sqcup B_2 \rightarrow A_1 \sqcup A_2$.

Condition à imposer pour un "produit universel" on veut que

$\bullet$ applique $S(B_1) \times S(B_2)$ dans $S(B_1 \sqcup B_2)$

l'associativité $(B_1 \sqcup B_2) \sqcup B_3 \cong B_1 \sqcup (B_2 \sqcup B_3)$ ou lien,

c'est-à-dire que $\exists \alpha_{B_1, B_2, B_3} : B_1 \sqcup (B_2 \sqcup B_3) \rightarrow (B_1 \sqcup B_2) \sqcup B_3$ et on veut que $\varphi_1 \bullet (\varphi_2 \bullet \varphi_3) = (\varphi_1 \bullet \varphi_2) \bullet \varphi_3 \circ \alpha_{B_1, B_2, B_3}$

cf. Noe Lane: Categories for the working mathematician.

On veut aussi que $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ i_j = \varphi_j$ pour $j=1, 2$, où $i_1 : B_1 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$
 $i_2 : B_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$

Fonctorialité: $(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \circ (f_1 \sqcup f_2) = (\varphi_1 \circ f_1) \bullet (\varphi_2 \circ f_2)$

Géométriquement $((B_1, \varphi_1), (B_2, \varphi_2)) \mapsto (B_1 \sqcup B_2, \varphi_1 \bullet \varphi_2)$ est un foncteur

ici, $\ast\text{-Alg}_1^{\text{Prob}}$ = catégorie des espaces de probabilité $\ast$ -algébriques:

Ob $(\ast\text{-Alg}_1^{\text{Prob}}) = \{(A, \phi) : A \text{ } \ast\text{-algèbre unitaire}, \phi : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ état}\}$

Mor $(\ast\text{-Alg}_1^{\text{Prob}}) = \{f : (B, \psi) \rightarrow (A, \phi) : f \text{ } \ast\text{-homomorphisme}, f(1_B) = 1_A, \phi \circ f = \psi\}$

En fait, on peut demander que $\bullet$ soit un produit tensoriel.

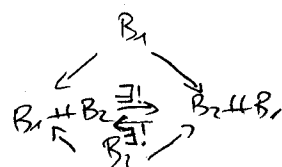
ici, $\mathbb{C}$ est initial dans $\star\text{-Alg}^{\text{Prob}}$: $\mathbb{C} \perp A \cong A \cong A \perp \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est $(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{C}})$ avec $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'unique état sur $\mathbb{C}$.

ici, $(\varphi \circ \delta_{\mathbb{C}}) \circ \varphi = \varphi \circ (\delta_{\mathbb{C}} \circ \varphi) \circ \text{id}$ et $\mathbb{C} \perp B \cong B \cong B \perp \mathbb{C}$, c'est-à-dire que λ_B, ρ_B , $\lambda_B: \mathbb{C} \perp B \xleftarrow{\cong} B$
 $\rho_B: B \perp \mathbb{C} \xleftarrow{\cong} B$

La condition sur les lois marginales exprime que $\zeta: B_1 \rightarrow B_1 \perp B_2$
 $\iota: B_2 \rightarrow B_1 \perp B_2$
 sont des morphismes de la catégorie $\star\text{-Alg}^{\text{Prob}}$.

On peut imposer de plus une condition de commutativité car $B_1 \perp B_2 \cong B_2 \perp B_1$, c'est-à-dire que $c_{B_1, B_2}: B_2 \perp B_1 \rightarrow B_1 \perp B_2$

satisfait $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ c_{B_1, B_2} = \varphi_2 \circ \varphi_1$: on a $\varphi_1 \circ \varphi_2 \cong \varphi_2 \circ \varphi_1$ et $\cong$ est l'identité.



Théorème: On a la normalisation miracle: $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(b_1, b_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(b_2, b_1)$
 pour $b_1 \in B_1$ et $b_2 \in B_2$.
 $= \varphi_1(b_1) \varphi_2(b_2)$

Normalisation + Associativité + Functorialité + Lois marginales ne sont satisfaites que pour le produit tensoriel: $\varphi_1 \circ \varphi_2(b_1, \dots, b_r) = \varphi_1\left(\prod_{i \in I} b_i\right) \varphi_2\left(\prod_{i \in J} b_i\right)$
 $b_i \in B_{\varepsilon_i}, \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$

Donc $\varphi_1 \circ \varphi_2 = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \tau$ où τ est l'unique homomorphisme

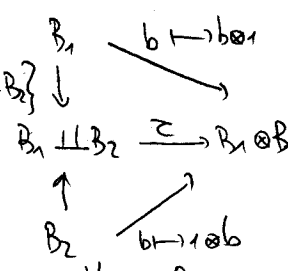
c'est-à-dire que $B_1 \otimes B_2 \cong B_1 \perp B_2$ / $\{ab = ba : a \in B_1, b \in B_2\}$

Le produit libre: $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est caractérisé par :

$\forall n \geq 1 \forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, 2\}^n$ avec $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \dots \neq \varepsilon_n \forall a_i \in B_{\varepsilon_1} \dots \forall a_n \in B_{\varepsilon_n}$ avec

$\varphi_{\varepsilon_i}(a_i) = 0$ on a $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(a_1, \dots, a_n) = 0$

On a alors $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(a_1, \dots, a_n) = \sum_{I \in \{1, \dots, n\}} (-1)^{n - \#I + 1} (\varphi_1 \circ \varphi_2)\left(\prod_{k \in I} a_k\right) \prod_{k \notin I} \varphi_{\varepsilon_k}(a_k)$
 lorsque les éléments ne sont pas entrelacés.



(3)

Dém. : $0 = \varphi(a_1^0 \dots a_n^0)$ où $a_i^0 = a_i - \varphi(a_i)1$
 $= \varphi((a_1 - \varphi(a_1)1) \dots (a_n - \varphi(a_n)1))$.

et il suffit de développer ce produit! le premier terme est $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ qu'on cherche à calculer...

Pour avoir plus de produits, il faut considérer les algèbres non unifiées et faire $A = \mathbb{C}1 \oplus A_0$ avec A_0 une sous-algèbre de A .

Ces produits peuvent aussi être définis sur les C^* -algèbres et les algèbres de $v.N$.