28/5/13

Yulia ①

GQC : sous-groupes distingués, quotients et composantes connexes.

Références : Sh. Wang, JFA 256 (2009), 3314–3341

Cirio, D'Andrea, Pinzari, Rossi : arXiv : 1210.1421

On va utiliser les catégories tensorielles pour définir sg distingués et g. quotients

Déf. : Soient G, H dans GQC : H est un sous-groupe de G s'il existe un $*$-morphisme surjectif $\pi : C(G) \to C(H)$ tel que $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta_G = \Delta_H \circ \pi$ et $\pi(\mathrm{Pol}(G)) \subseteq \mathrm{Pol}(H)$ [a-t-on automatique?]

H coagit sur G : $\rho := (1 \otimes \pi) \circ \Delta_G : C(G) \to C(G) \otimes C(H)$

$\lambda := (\pi \otimes 1) \circ \Delta_G : C(G) \to C(H) \otimes C(G)$

Ce sont des coactions : $(\rho \otimes 1) \circ \rho = (1 \otimes \Delta_H) \circ \rho$ et $(1 \otimes \lambda) \circ \lambda = (\Delta_H \otimes 1) \circ \lambda$

Notons $A_{G/H} = \{ a \in C(G) : \rho(a) = a \otimes 1 \}$

$A_{H \backslash G} = \{ a \in C(G) : \lambda(a) = 1 \otimes a \}$

Cas classique : Si G est un groupe compact et $H \subset G$ est un sous-groupe et $\pi : C(G) \to C(H)$ la restriction

et $\rho : C(G) \to C(H, C(G)) \cong C(G) \otimes C(H) \cong C(G \times H)$

$f \mapsto (h \mapsto g \mapsto (1 \otimes \pi) \cdot \Delta f(g,h) = (1 \otimes \pi) f(gh) = f(gh))$

i.e., $\rho(f)(h) : g \mapsto f(gh)$

$\lambda(f)(h) : g \mapsto f(hg)$

et si $\rho(f) = f \otimes 1$, alors $f(gh) = f(g)$ pour tout g, i.e. $f(gH) = f(g)$ pour tout g.

et si $\lambda(f) = 1 \otimes f$, alors $f(Hg) = f(g)$ pour tout g.

En général, posons $A_{H \backslash G / H} = A_{G/H} \cap A_{H \backslash G}$: analogue des fonctions biinvariantes.

Toujours on a $\Delta(A_{H \backslash G}) \subset A_{H \backslash G} \otimes C(G)$

$\Delta(A_{G/H}) \subset C(G) \otimes A_{G/H}$

et donc $A_{H \backslash G / H} \subset A_{H \backslash G} \otimes A_{G/H}$

(2)

Proposition : Soit H un sg d'un GQC G. Alors

$A_{G/H} = A_{H\backslash G} \iff \Delta(A_{G/H}) \subset A_{G/H} \otimes A_{G/H} \iff$ (c) pour toute corep irréd. v de G, $v|_H := (1\otimes\pi)\circ v : V \to V\otimes C(H)$ a un vecteur invariant non trivial seulement si $v|_H$ est un multiple de la représentation triviale: $v|_H(x) = x\otimes 1_H$

→ de dim finie unitaire. $v : V \to V\otimes C(G)$, $x \mapsto x\otimes 1$

Un tel H est dit distingué ; dans ce cas $A_{G/H}$ est un GQC avec la structure induite par G.

Ex. : Soit $G = C^*(\Gamma)$, Γ groupe discret. Alors tout sous-groupe est distingué et isomorphe à $C^*(\Lambda)$, où $\Lambda \simeq \Gamma/E$ avec E un sous-groupe distingué.

⚠ Pb à résoudre : quelle C^*-algèbre de groupe considère-t-on ?

Soit $\pi : C^*(\Gamma) \to C(\mathbb{H})$ épimorphisme et v corep. irréd. de $C^*(\Gamma)$. v est de la forme λ_g avec $g \in \Gamma$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\otimes C^*(\Gamma)$, $z \mapsto z\otimes\lambda_g$. Alors $\lambda_g|_{\mathbb{H}}$ est de dim 1 et donc (c) est vérifiée et $\mathbb{H}$ est distinguée.

$\mathbb{H}$ est cocommutatif et donc il existe Λ tel que $C(\mathbb{H}) \cong C^*(\Lambda)$. $\pi(\{\lambda_g\}_{g\in\Gamma}) = \{\lambda_a\}_{a\in\Lambda}$

Or $\Delta(\lambda_g) = \lambda_g\otimes\lambda_g$: c'est un "group-like element" et donc $\Delta(\pi(a)) = \pi(a)\otimes\pi(a)$

Il suit que $\pi(\Gamma) \subset \Lambda$. Or on a densité et donc $\pi : \Gamma \to \Lambda$ surjectif

Donc $\Lambda \simeq \Gamma/E$ où $E \subset \Gamma$ est un sous-groupe distingué.

GQ quotient : Soient L, G des groupes q. compacts et $\varphi : \mathrm{Pol}(L) \to \mathrm{Pol}(G)$ un $*$-homomorphisme injectif (unital ?!) tel que $(\varphi\otimes\varphi)\circ\Delta_L = \Delta_G\circ\varphi$. Alors L est un groupe quotient de G. Cas classique : si L, G sont des groupes et $L \simeq G/H$ et $\pi : G \to L$ l'application quotient, alors $C(L) \to C(G)$, $f \mapsto f\circ\pi$

⚠ On n'exige pas que φ se prolonge à $C(L)$

Ex : Si H est un sous-groupe distingué d'un GQC G, alors $A_{G/H}$ est un groupe quotient de G.

Si L est un groupe quotient, on obtient une injection $\mathrm{Corep}\, L \to \mathrm{Corep}\, G$.

Soit $u : H_u \longrightarrow H_u \otimes C(L)$ une corep. et $\hat\varphi(u) := (1_{H_u} \otimes \varphi) \circ u : H_u \to H_u \otimes C(G)$

Alors $\hat\varphi$ est compatible avec les foncteurs fibrés F_L et F_G :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Corep}\, L \arrow[rr, "\hat\varphi"] \arrow[dr, "F_L"'] & & \mathrm{Corep}\, G \arrow[dl, "F_G"] \\ & \mathrm{Hilb}_f & \end{tikzcd}$$

(esp. de Hilbert de dim finie)

Proposition: $\hat\varphi$ est un $*$-foncteur plein tensoriel de C^*-catégories tensorielles strictes avec conjugué.

surjectif sur les morphismes.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ une inclusion pleine de C^*-catégories strictes à conjugués.

Si $s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ est irréductible, alors s est aussi irréductible dans $\mathcal{C}$

Soit $\mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{C}$ la sous-catégorie des objets disjoints de tous les objets de $\mathcal{S}$.

Alors $\mathcal{S}^\perp$ n'est en général pas fermée sous produits tensoriels, mais contient les sommes directes et les conjugués. Pour tout $u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, il existe une unique décomposition $u = u_s \oplus u_{s^\perp}$ où $u_s \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ (car tout objet se décompose en somme d'objets irréductibles)

Si $u = u_s$ et $v = v_{s^\perp}$, alors $\mathrm{Mor}(u,v) = 0$. (Ex $SU(2)$ contient une copie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: quotient $SO(3)$ et les représentations de dim impaire de $SU(2)$ seront aussi des rep de $SO(3)$, mais pas celles de dim paire.)

Si $T \in \mathrm{Mor}(u_s \oplus u_{s^\perp}, v_s \oplus v_s^\perp)$, alors $T = T_s \oplus T_{s^\perp}$, où $T_s \in \mathrm{Mor}(u_s, v_s)$
$T_{s^\perp} \in \mathrm{Mor}(u_{s^\perp}, v_{s^\perp})$.

Alors $\begin{array}{l} T \longmapsto T_s \\ u \longmapsto u_s \end{array}$ est un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{S}$

Prop: Soit G un GQC et $\mathcal{S} \subset \mathrm{Corep}\, G$ une C^*-catégorie tensorielle stricte pleine avec conjugués. Soit $\mathcal{A}$ la $*$-algèbre de Hopf qui correspond à $\mathcal{S}$ (et le foncteur fibré $F_G|_{\mathcal{S}}$). Pour un objet irréductible $u \in \mathrm{Corep}\, G$, $u = (u_{jk})$, les ASSE :

ⓐ $1_{\bar u} \otimes F(v) \otimes 1_u \circ R \subset F((\bar u v u)_s)$ pour tous $v \in \mathcal{S}_{\mathrm{irred}}$ et $R \in \mathrm{Mor}(\imath, \bar u u)$

ⓑ $\sum_i u_{ij}^* \, x \, u_{ik} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ et tous j, k.

Déf. : Une sous-catégorie pleine à conjugués $\mathcal{S} \subset \mathrm{Corep}\, G$ est <u>distinguée</u> si (a) et (b) sont vérifiées pour tout $u \in \mathrm{Corep}\, G$, ou de manière équivalente, pour tout $u \in \mathcal{S}^{\perp}$.

<u>Ex</u> : $\Lambda \subset \Gamma$ sous-groupe de Γ discret : Λ est distingué dans Γ ssi $\mathrm{Corep}\, C^*(\Lambda) \subset \mathrm{Corep}\, C^*(\Gamma)$ distinguée.

Les objets irréductibles sont les éléments λ_g et $\lambda_g \in \mathcal{S} \Leftrightarrow g \in \Lambda$.

$$\lambda_g \in \mathcal{S}^{\perp} \Leftrightarrow g \in \Gamma \setminus \Lambda$$

La condition (b) devient $\lambda_g^* \lambda_h \lambda_g \in \mathrm{Pol}(C^*(\Lambda)) = \langle \lambda_h : h \in \Lambda \rangle$

$$\lambda_g^* \lambda_h \lambda_g = \lambda_{g^{-1}hg}$$

, ce qui $\Leftrightarrow g^{-1}hg \in \Lambda$ pour tout $g \in \Gamma$ et $h \in \Lambda$.

<u>Théorème</u> : Soit L un groupe quotient de G et $\mathcal{S}$ les corep de $L \subset \mathrm{corep}\, G$.

Alors $\mathcal{S}$ est distingué ssi $\exists\, H$ sous-groupe distingué de G $\mathrm{Pol}(L) \cong \mathrm{Pol}(G/H)$ en tant que $*$-alg. de Hopf.

Ex d'un groupe qui n'est pas vraiment quotient ?!