Yulia
31/5/2013

Composante connexe

Déf : Soit $\mathcal{C}$ une C^*-catégorie stricte avec sous-objets conjugués et $u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Alors u est <u>de torsion</u> si la C^*-catégorie tensorielle pleine avec sous-objets conjugués $\mathcal{C}_u$ engendrée par u contient un nombre <u>fini</u> d'objets irréductibles non équivalents.

Prop : Si u est de torsion, tout sous-objet l'est aussi, ainsi que toute somme finie, mais pas nécessairement les produits tensoriels.

Ex : Si $G = C^*(\Gamma)$, Γ discret, $\mathcal{C} = \mathrm{Corep}\, G$, alors les objets de torsion irréductibles sont les éléments de torsion dans Γ : on écrit $g \in \Gamma^t$.

Déf : Une C^*-catégorie tensorielle stricte est dite <u>sans torsion</u> si aucun objet non trivial n'est de torsion. Un GQC G est dit <u>connexe</u> s'il n'admet pas de $*$-sous-algèbre de Hopf unifère non triviale de dim finie.

Prop : Un GQC G est connexe ssi $\mathrm{Corep}\, G$ est sans torsion.

Ex :
- $C^*(\Gamma)$ est connexe ssi Γ est sans torsion.
- $C(G)$, pour G groupe compact, est connexe ssi G l'est
  ssi G n'a pas de quotient fini.

De même, G non connexe $\Rightarrow$ $G^0 \neq G$ et G/G^0 est totalement discontinu et compact
$\longrightarrow$ il est donc profini et a des quotients finis.

Déf : Un groupe topologique G est <u>profini</u> s'il est limite inverse (= projective) de groupes finis. $G = \varprojlim G_\alpha$ est la limite inverse des G_α si
$\forall\, \alpha \leq \beta\ \exists\, \pi_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ $\pi_{\beta\gamma} \circ \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\gamma}$ $(\alpha \leq \beta \leq \gamma)$ et alors
$G \subset \prod_\alpha G_\alpha$ et $G = \{ x = (x_\alpha) : \forall \alpha \in \beta\ \ x_\beta = \pi_{\alpha\beta}(x_\alpha)\}$ est un groupe topologique.

N.B. : Si les G_α sont compacts, alors G l'est.

Ref. : Hoffmann – Morris.

<u>Prop</u> : Un groupe l.c. est totalement discontinu ssi tout voisinage de l'identité contient un sous-groupe ouvert.

<u>Ex</u> : • Un GQC fini non trivial ($\neq \mathbb{C}$) n'est pas connexe.

• Les déformations des groupes de Lie connexes classiques sont connexes.

<u>Prop</u> : ◦ Soit G un GQC. Si G est connexe, tout son quotient l'est.

◦ Soient K un s-g et L un quotient. Si K est connexe, alors l'image de K dans L est connexe.

$$\begin{tikzcd} C(G) \arrow[r] & C(K) \\ C(L) \arrow[u] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

◦ Soit G un GQC et $H : \mathrm{Corep}\, G \longrightarrow \mathrm{Hilb}_f$ le foncteur fibré.
Soit $\mathcal{C}^\circ$ la sous-catégorie de $\mathrm{Corep}\, G$ telle que $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Corep}\, G$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^\circ}(u,v) = \bigcap_{\substack{K \text{ s-g} \\ \text{de } G \text{ connexe}}} \mathrm{Mor}(u_{|K}, v_{|K})$$

$C(G) \xrightarrow{\pi} C(K)$ associe $u \in \mathrm{Corep}\, G$ à $\underbrace{(1 \otimes \pi) u}_{u|K} \in \mathrm{Corep}\, K$.

<u>Ex</u> : Si $\mathbb{C}$ est le seul sous-groupe connexe de G, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^\circ}(u,v) = \mathrm{End}(H_u, H_v)$ et tout objet non trivial est réductible : le GQC qui correspond à $\mathcal{C}^\circ$ est $\mathbb{C}$.

<u>Déf</u> : G est dit totalement discontinu si $G^\circ = \mathbb{C}$.

N.B. $\mathcal{C}^\circ$ est une sous-catégorie tensorielle avec conjugués de Hilb_f. En la complétant par sous objets et somme directe, on obtient la catégorie $\mathrm{Corep}\, G^\circ$ d'un GQC G°. C'est par définition <u>la composante connexe de l'identité</u>

<u>Ex</u> : Si G est connexe, $G = G^\circ$

N.B. On peut définir G° par la propriété universelle que pour tout sous-groupe connexe K de G on a

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Corep}\, G \arrow[r, "\mathrm{Id}_G"] \arrow[d, "H"'] & \mathrm{Corep}\, G^\circ \arrow[dl, "H"'] \arrow[d, dashed] \\ \mathrm{Hilb}_f & \mathrm{Corep}\, K \arrow[l, "H"] \end{tikzcd}$$

<u>Ex</u> : • G groupe compact : G° est la composante connexe de l'identité et c'est le s-g engendré par tous les sous-groupes fermés connexes.

• $G = C^*(\Gamma)$, Γ discret. $G^\circ = C^*(\Gamma/\Lambda)$ avec Γ/Λ maximal sans torsion : Λ est l'intersection des s-g distingués tels que le quotient est sans torsion.

⚠ En général, G^0 n'est pas distingué et on définit le sg distingué convexe maximal G^n de G^0.

On a $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Corep}\,G$ et $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(u,v) = \displaystyle\bigcap_{\substack{N \text{ sous-groupe} \\ \text{de } G \text{ connexe distingué}}} \mathrm{Mor}(u_{|N}, v_{|N})$

Déf : Un GQC G est profini si $C(G)$ est la limite injective de $*$-sous-algèbres de Hopf de dim finie.

N.B. : cela équivaut à exiger que Corep G est la limite injective de C^*-sous-catégories pleines tensorielles strictes avec conjugués finies [i.e., un nombre fini d'objets irréductibles]

Prop : Un GQC est profini ssi tout objet de Corep G est de torsion.

N.B. : Dans le cas d'un GQC G, si $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ est une représentation de dim finie, G profini $\Rightarrow |G/\ker\pi| < \infty$.

⚠ G/G^n n'est pas toujours profini.

Soit $G = C^*(\Gamma)$, Γ discret, ~~et $G^n = C^*(\Gamma/\Lambda)$~~. (Il existe Γ discret, infini, finiment engendré, dans lequel tout $g \in \Gamma$ est de torsion.

Donc $C^*(\Gamma)$ est totalement discontinu : $G^0 = \mathbb{C} = G^n$

$C^*(\Gamma)$ est même un GQC matriciel (puisque Γ est finiment engendré)

non profini car il a des objets de Corep G qui ne sont pas de torsion.

→ il existe une $\exists!$ Corep de dim finie qui engendre toute la $*$-algèbre de Hopf : la corep fondamentale, qui n'est pas de torsion.

Réf. Cours de Claudio Pinzari