Martijn
4/5/2013

Idempotent state on locally compact quantum groups

d'après Pekka Salmi et Adam Skalski

<u>Théorème</u> : Soit (A, Δ) un g.q.l.c. comoyennable. Il existe une correspondance (bijection très explicite) entre <u>états idempotents</u> et <u>sous-C^*-algèbres de A</u> "espérées" et "invariantes"

<u>Rappel</u> : Un $gq\underline{l}c$ $(A, \Delta, \varphi, \psi)$ est la donnée d'une C^*-algèbre A, d'une comultiplication $\Delta : A \longrightarrow M(A \otimes_{min} A)$ et de deux "poids propres" (normal, semi-finite, locally KMS)

$\varphi, \psi : A^+ \longrightarrow [0, +\infty]$ tels que $\varphi\left((id \otimes \omega) \circ \Delta(x)\right) = \varphi(x)\,\omega(1)$ pour $x \in A^+$ et $\omega \in A^*_+$
$\psi\left((\omega \otimes id) \circ \Delta(x)\right) = \psi(x)\,\omega(1)$

<u>Remarque</u> : dans le cas compact, $\varphi = \psi$ sont des états et A est unitale.

<u>Déf.</u> : Soient $\omega, \vartheta \in A^*$, la convolution est définie par $\omega * \vartheta = (\omega \otimes \vartheta) \circ \Delta$ [Elle s'étend aux multiplicateurs $M(A)$]. On dit que ω est <u>idempotent</u> si $\omega * \omega = \omega$.
On dit que $\underline{\vartheta \leq \omega}$ si $\vartheta * \omega = \omega$.

<u>Exemple</u> : $A = C_0(G)$, $B = C(H)$ avec G, H groupes, H compact, sous-groupe de G. Si $\pi : A \to B$ est la restriction, $\ell_B \circ \pi$ est un état idempotent.

<u>Déf</u> : Si C est une sous-algèbre de A, une application $E_C : A \to C$ est une <u>espérance conditionnelle</u> si c'est une projection de norme 1. Si de plus φ est un poids (un état) sur A et $\varphi \circ E_C = \varphi$, alors on dit que C est φ-<u>espérée</u>

<u>N.B.</u> : E_C est complètement positive et $E_C(ca) = c\,E_C(a)$ pour $c \in C$ et $a \in A$.

<u>Ex.</u> : Si H est un sous-groupe compact de G,

① $C_0(G) \longrightarrow C_0(H \backslash G)$ et $C_0(G) \longrightarrow C_0(G/H)$
$f \longmapsto \int_H f(hg)\,dh$ $\qquad f \longmapsto \int_H f(gh)\,dh$

<u>Déf</u> : Si C est une sous-C^*-algèbre de A, C est <u>invariante à droite</u> si $(id \otimes \mu)\Delta(C) \subseteq C$ pour tout $\mu \in A^*$ [cas compact : cela revient à $\Delta(C) \subseteq C \otimes A$]

N.B. : Si $\omega \in A^*$, il existe une extension unique stricte $\omega : M(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ et on a $\omega(a) = \omega(\_\, a)$; $(id \otimes \mu) \circ \Delta(a)$ est l'élément dans A défini, par "$\omega((id \otimes \mu)\Delta(a))$" $= (\omega \otimes \mu)\Delta(a)$.

Description de la correspondance : sous C^* algèbres $\longrightarrow$ états idempotents

[Q: N'y a-t-il pas de théorie des poids idempotents ? pour des sous-groupes moyennables ?]

Th: Soit $\omega \in A^*$. C'est un état idempotent ssi $L_\omega : \underset{x \longmapsto \omega \otimes id\, \Delta(x)}{A \longrightarrow A}$ est une espérance conditionnelle.

Démo: ($\Leftarrow$) Soit $C \subseteq A$ une sous-C^*-algèbre avec $L_\omega : A \to C$ une espérance conditionnelle.
counité $\to$ hyp de comoyennabilité.
Alors L_ω est positive et $\epsilon \circ L_\omega \in A^*$ est contractante et positive. Puisque $L_\omega = L_\omega \circ L_\omega = L_{\omega * \omega}$, on a $\omega = \omega * \omega$ (la comultiplication est injective !) et donc $\omega(1) = \omega(1)^2$.
Comme ω est non nulle, $\omega(1) = 1$.

($\Rightarrow$) Soit ω un état idempotent. Alors $L_\omega : A \longrightarrow A$ est c.p., non dégénérée et idempotente. Il faut m.q. l'image $L_\omega(A)$ est une C^*-sous-algèbre de A. (on a bien $L_\omega(a^*) = L_\omega(a)^*$; c'est le produit qui pose problème). Soient $a, b, c, d \in A$ et $\Delta_2 = (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$. On calcule $(\omega \otimes \omega \otimes id)(\Delta_2(a)(1 \otimes c \otimes d))$:
considéré pour se retrouver dans A et non dans $M(A)$.
notons ${}_c\omega = \omega(\_\, c)$; cela fait $(\omega \otimes {}_c\omega \otimes id)(\Delta_2(a)(1 \otimes 1 \otimes d))$

$$= (\omega * {}_c\omega \otimes id)(\Delta(a)(1 \otimes d))$$
$$\overset{FS_3}{=} \omega(c)(\omega \otimes id)(\Delta(a)(1 \otimes d))$$
$$= \omega(c)(L_\omega(a) \cdot d) = L_\omega(a)(\omega \otimes id)(c \otimes d)$$

On a ainsi pour tout $x \in A \otimes A$ que $(\omega \otimes \omega \otimes id)(\Delta_2(a)(1 \otimes x)) = L_\omega(a)(\omega \otimes id)(x)$, puisque $\mathrm{vect}\{\Delta(e)(c \otimes d) : e, c, b \in A\}$ dense dans $A \otimes A$.

On a $L_\omega(L_\omega(a) b) = L_\omega((\omega \otimes id)(\Delta(a)(1 \otimes b))) = (\omega \otimes L_\omega)(\Delta(a)(1 \otimes b))$
$$= (\omega \otimes \omega \otimes id)(\Delta_2(a)\, 1 \otimes \Delta(b))$$
$$= L_\omega(a)(\omega \otimes id)(\Delta(b)) = L_\omega(a) \cdot L_\omega(b).$$

L'invariance à droite est évidente.

Lemme : Soit $C \subseteq A$ sous-C^*-algèbre et ψ un "poids propre" sur A, soit $E_C : A \longrightarrow C$ une espérance conditionnelle ψ-spérée. Alors

$$K \equiv \{ a \in \cancel{A}\, \mathfrak{n}_\psi : E_C(a) = 0 \} = L \equiv \{ a \in \cancel{A}\, \mathfrak{n}_\psi : \forall c \in C \cap \mathfrak{n}_\psi\ \psi(c^* a) = 0 \}$$

"$\psi(a^* a) < \infty$"

Dém : $\subseteq$: si $a \in K$, $\psi(c^* a) = \psi(E_C(c^* a)) = \psi(c^* E_C(a)) = 0$

$\supseteq$: si $a \in L$, $\psi(E_C(a^*)a) = 0 = \psi(E_C(E_C(a^*)a)) = \psi(E_C(a)^* E_C(a))$

et donc $E_C(a) = 0$. ∎

Lemme : Si (A, Δ) est comoyennable, $T : A \xrightarrow{c.b.} A$ telle que $(T \otimes id) : A \otimes A \to A \otimes A$ soit strictement continue sur les ensembles bornés. Si $G = A^*$ [ou si G est une partie de A^* telle que ... $\xrightarrow[w^*\text{-dense, invariant à gauche}]{}$ voir l'article !] , alors

(i) $T = L_\mu$ pour un $\mu \in A^*$ $\iff$ (ii) $(T \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ T$

$\iff$ (iii) $T \circ R_\mu = R_\mu \circ T$ pour tout $\mu \in G$, où R_μ est défini comme L_μ mais "à droite"

Dém : $\underline{i \Rightarrow ii}$: coassociativité !

$\underline{ii \Rightarrow i}$: appliquer $\epsilon \otimes id$ à (ii) et prendre $\mu = \epsilon \circ T$

$\underline{ii \Rightarrow iii}$: appliquer $id \otimes \mu$ à (ii)

$\underline{iii \Rightarrow ii}$: clair si "G est assez dense" : $\underset{\substack{\| \\ (id \otimes \mu) \circ (T \otimes id) \circ \Delta}}{T \circ R_\mu} = \underset{\substack{\| \\ (id \otimes \mu) \circ \Delta \circ T}}{R_\mu \circ T}$

et si on teste sur suffisamment de μ, ii suit.

Prop : Soit C une sC^*-algèbre de A invariante à droite et φ-spérée. Alors il existe un état idempotent $\omega \in A^*$ tel que $C = L_\omega(A)$

Idée : Soit $E_C : A \longrightarrow C$. Il faut montrer que $E_C \circ R_\mu = R_\mu \circ E_C$ pour $\mu \in G \subset A^*$ "suffisamment grand". Si $E_C(a) = 0$, l'équation est triviale...