Introduction à :
Hypercontractivity for free products (Perrin et al.)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{-1,1\}^d$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ les fonctions de Rademacher. Le système $\boxed{\text{de Walsh :}}$ pour tout $J \subset \{1, \dots, d\}$, on pose $w_J = \prod_{j \in J} \varepsilon_j$. $(w_\emptyset = 1)$.
Munissons Ω de la mesure uniforme. Alors $L^\infty(\Omega, \mu)$ est vect $\{w_J\}$ et de même pour L^p.

De plus, (w_J) est une base hilbertienne de L^2.

Soit $r \in]0,1]$ et $T_r : \begin{array}{l} L^\infty \longrightarrow L^\infty \text{ linéaire} \\ w_J \longmapsto r^{|J|} w_J \end{array}$. Alors T_r est une contraction de $L^p \longrightarrow L^q$ pour $p<q$.

De plus, on a hypercontractivité :

Théorème : $\| T_r : L^p \to L^q \| \leq 1 \iff r \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$ [Bonami - Gross ≈70]
Stratégie : faire le cas $d=1$: inégalité à deux points, puis faire une récurrence sur d.

$\boxed{\text{Généralisation}}$ Soit $(g_j)_{j \geq 1}$ une suite de gaussiennes indépendante sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit $d=1$ et $\gamma(x_1, \dots, x_d) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}}\right) \dots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_d^2}{2}}\right) dx_1 \dots dx_d$ sur $\mathbb{R}^d$
Alors la suite de polynômes de Hermite $(h_n)_{n \geq 1}$ donne une base orthonormée de $L^2(\gamma)$
par tensorisation : posons $\underset{\text{en la 1ère variable}}{h_{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \underset{\text{en la d}^e\text{ variable}}{h_{\alpha_d}} = H_{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)}$: c'est une b.o.n.

et on s'intéresse à $T_r : H_{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} \longmapsto r^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} H(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Th (Nelson) : Si $1 < p < q < \infty$, T_r s'étend en une contraction $L^p(\gamma) \to L^q(\gamma)$ ssi $r \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$.
Ici apparaît le semi groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(T(e^{-t}))_{t>0}$;
$T(e^{-t})$ est une contraction ssi $e^{-2t} \leq \frac{p-1}{q-1}$.

$\boxed{3^e \text{ exemple}}$: $\mathbb{T}$ cercle unité et $T_r : f \sim \sum \hat{f}(k) e^{ikt} \longrightarrow T_r f \sim \sum r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt} = \underset{\text{noyau de Poisson}}{P_r} * f$

Th (Weissler 1980) : le même !
et on peut définir le semigroupe de Poisson $(T_{e^{-t}})$.

$\boxed{1^{er}\text{ exemple non commutatif}}$: Algèbre de Clifford.

Soit $d \geq 1$. Il existe des matrices $x_1, \dots, x_d \in M_{2^d}(\mathbb{C})$ autoadjointes unitaires telles que $\forall i \neq j \quad x_i x_j + x_j x_i = 0$ (CAR). Soit C_d la C^*-algèbre engendrée par $x_1, \dots, x_d$.
On peut le décrire comme l'ev. engendré par $z_J = x_{j_1} \cdots x_{j_n}$ pour $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, d\}$, $j_1 < \dots < j_n$
et donc $\dim C_d = 2^d$. Définissons $\tau : \begin{array}{l} C_d \longrightarrow \mathbb{C} \\ 1 \longmapsto 1 \\ z_J \longmapsto 0 \text{ si } J \neq \emptyset \end{array}$: c'est une trace

Considérons l'espace non commutatif associé, muni de $\|y\|_p = \tau(|y|^p)^{1/p}$: L^p.

Soit $r \in]0,1]$ et $O(r)$: $\begin{array}{l} C_d \longrightarrow C_d \\ z_J \longmapsto r^{|J|} z_J \end{array}$

Théorème : (Carlen-Lieb 1993) : le même !

Cet exemple, ainsi que le 2^e ex, sont les cas extrêmes d'une seule et même construction de semigroupes d'Ornstein-Uhlenbeck de q-déformation. Il y a le même théorème pour tout $q \in [-1,1]$, dû à Philippe Biane.

$\boxed{\text{Produit libre réduit}}$

Soient $A_1, \dots, A_n$ algèbres unifères et $\varphi_i : A_i \longrightarrow \mathbb{C}$ un état. Posons $A_i^0 = \ker \varphi_i$, de sorte que $A_i = \langle 1 \rangle \oplus A_i^0$.

- Produit libre algébrique (unital) : $\mathcal{A}^0 = \bigoplus_{m \geq 1} \left[\bigoplus_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m} A_{i_1}^0 \otimes \dots \otimes A_{i_m}^0 \right]$

On note alors $\underset{1 \leq i \leq n}{\cancel{*}} A_i$ la C^*-algèbre libre muni de la plus grande des C^*normes

Proposition : La forme linéaire $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ envoyant 1 sur 1, $\mathcal{A}_0$ sur 0 s'étend en un état $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Soit (H, π, ξ) une représentation GNS de φ et $\pi : A \longrightarrow B(H)$.
Alors $\pi(A)$ est appelée C^*-algèbre réduite de $(A_1, \varphi_1), \dots, (A_n, \varphi_n)$.
On la note $*\,(A_i, \varphi_i)$

Supposons que de plus A_i est une algèbre de von Neumann et que φ_i est normal.
Alors on considère l'algèbre de von Neumann $\pi(A)'' \subset B(H)$, notée $\overline{*}(A_i, \varphi_i)$ dite réduite.

Théorème (Blanchard-Dykema). Soit $(M_1, \tau_1), \dots, (M_n, \tau_n)$ des algèbres $_{1 \leq i \leq n}$ de von Neumann munies de traces normales normalisées, fidèles. De même, considérons $(M_1', \tau_1'), \dots, (M_n', \tau_n')$.

Pour tout $1 \leq j \leq n$, soit $T_j : M_j \longrightarrow M'_j$ unifère complètement positive, telle que $\tau'_j \circ T_j = \tau_j$ (et en particulier $T_j(M_j^{\circ}) \subset M_j'^{\circ}$). Alors il existe

$$T : \underset{1 \leq i \leq n}{*} (M_i, \tau_i) \longrightarrow \underset{1 \leq i \leq n}{*} (M'_i, \tau'_i)$$ normale unitale complètement positive,

telle que $T(\underbrace{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n}) = T_{i_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes T_{i_n}(x_n)$
c'est $x_1 \ldots x_n$ dans cette algèbre.

<u>Exemple</u> : Soit $\tau : L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto \int f$ et considérons $\mathbb{F}_n$ le groupe libre à n générateurs et son algèbre de von Neumann $VN(\mathbb{F}_n)$ munie de la trace usuelle, alors $\underset{1 \leq i \leq n}{*} \underbrace{L^\infty(\mathbb{T}, \tau)}_{M_i} = VN(\mathbb{F}_n)$

Notons e_{k}^{i} la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ dans le i^e facteur.

Idée algébrique : Soient $c_1, \ldots, c_n$ les générateurs de $\mathbb{F}_n$. Alors $g \in \mathbb{F}_n$ s'écrit

$g = c_{i_1}^{k_1} \ldots c_{i_m}^{k_m}$ avec $i_1 \neq i_2 \ldots i_{m-1} \neq i_m$ et $k_j \in \mathbb{Z}^*$. Soit $\lambda : \mathbb{F}_n \longrightarrow VN(\mathbb{F}_n)$ la rep. régulière.

Alors $\lambda(g) = e_{k_1}^{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_m}^{i_m}$. Notons alors $T_i(r)$ l'application "$T(r)$" sur M_i.
$T_i(r)(e_k^i) = r^{|k|} e_k^i$.

Alors $T(\lambda(g)) = T_{i_1}(e_{k_1}^{i_1}) \ldots T_{i_m}(e_{k_m}^{i_m}) = r^{|k_1| + \ldots + |k_m|} e_{k_1}^{i_1} \ldots e_{k_m}^{i_m}$
$= r^{|g|} \lambda(g)$ si on pose $|g| = |k_1| + \ldots + |k_m|$.

Le théorème de Blanchard et Dykema donne alors une application $T(r) : VN(\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\text{normal}} VN(\mathbb{F}_n)$, $\lambda(g) \longmapsto r^{|g|}\lambda(g)$

$\rightarrow$ c'est <u>l'opérateur de Poisson non commutatif</u>.

Si on pose $T_t = T(e^{-t})$, on a le semigroupe de Poisson non commutatif.

N.B. : Ces opérateurs s'étendent à tous les L^p !

Sujet principal de l'article : produit libre des algèbres de Clifford.

Avant d'attaquer l'article : systèmes de spin !

Note de Boydon : preuve simplifiée de la fidélité du produit libre d'états fidèles.