Hypercontractivité

Xu
7/11/13

Cadre : G = groupe discret et $\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$L(G)$ = a. vN de $G = \{\lambda(g) : g \in G\}'' \subset B(\ell_2(G))$

muni de $\tau : f \mapsto \langle f \cdot e, e\rangle$ où e est l'unité de G.

Si $f \in L(G)$, $f \sim \sum_{g\in G} f(g)\lambda(g)$ (on peut faire cv. en top sup d'op. forte)

$$P_t(f) = \sum_{g \in G} e^{-t\psi(g)} f(g)\lambda(g)$$

P_t est un sg unifère c.p. autoadjoint sur L^2 [i.e., $\tau(P_t(f_1)f_2) = \tau(f_1 P_t(f_2))$] ssi $\psi(e)=0$ et $\psi(g) = \psi(g^{-1}) \geqslant 0$ et ψ est c.n.

où ψ est conditionnellement négative (c.n.) si $\alpha(g) \in \mathbb{C}$, $\sum \alpha(g) = 0 \Rightarrow \sum \psi(g^{-1}h)\overline{\alpha(g)}\alpha(h) \leqslant 0$.

Alors : $\|P_t\|_{p\to p} \leqslant 1$ pour tout $p \in [1,\infty]$.

Problème : si $1 < p < q < \infty$, trouver $t > 0$ tel que $\|P_t\|_{p \to q} \leqslant 1$ $(*)$

(alors ce sera vrai pour tous les $t>0$ $\{t : (*)\} = [t_{p,q}, +\infty[$.

Plusieurs stratégies : la plus efficace : log-Sobolev.

Fait : CN Soit $g \in G$ tel que $\psi(g) = \psi(g^{-1}) = \sigma$. On pose $x = \lambda(g) + \lambda(g^{-1})$.

Alors on a $\tau(x) = 0$ et $\tau(x^2) = 2 + \tau(\lambda(g^2) + \lambda(g^{-2})) = \begin{cases} 4 & \text{si } g^2 = e,\ g \neq e \\ 2 & \text{si } g^2 \neq e \end{cases}$

Appliquons $*$ à $f = 1 + \varepsilon x$ ($\varepsilon>0$) : $\|1 + e^{-t\sigma}\varepsilon x\|_q \leq \|1+\varepsilon x\|_p = h(\varepsilon)$ $(\dagger)$

on a pu enlevé la valeur absolue !

$h(0) = 1$, $h(\varepsilon) = \Big[\mathbb{E}\,(\underbrace{1+\varepsilon x}_{>0})^p\Big]^{\frac{1}{p}}$ $\quad \frac{d}{d\varepsilon} h(\varepsilon) = \frac{1}{p}\|1+\varepsilon x\|_p^{\frac{1}{p}-1}\, p\, \mathbb{E}[(1+\varepsilon x)^{p-1}x]$

x engendre une s.a. vN commutative : trace, composée avec la mesure spectrale de x, définit une mesure sur cette sa ; et $\frac{d}{d\varepsilon} h(\varepsilon)\big|_{\varepsilon = 0} = 0$ car $\mathbb{E}x = 0$.

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} h(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\cancel{p}}\cancel{p}(p-1)\mathbb{E}x^2 = (p-1)\mathbb{E}x^2$$

Donc $(\dagger)$ implique que $(q-1)(e^{-t\sigma})^2\cancel{\mathbb{E}x^2} \leqslant (p-1)\cancel{\mathbb{E}x^2}$ et

donc $\boxed{t \geqslant \frac{1}{2\sigma}\log\frac{q-1}{p-1}}$ (puisque $e^{-t\sigma} \leqslant \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$)

Conclusion : Si $\sigma = \inf_{g\neq e}\psi(g)$, alors $t_{p,q} \geqslant \frac{1}{2\sigma}\log\frac{q-1}{p-1} = T_{p,q}$,

"le temps espéré".

N.B. : on peut toujours supposer $\sigma = 1$.

Théorème A : $G = \mathbb{F}_n$, $\psi(g) = |g|$.

1) si $n = 2$, et si $q \in 2\mathbb{N}^*$, $t_{2,q} = T_{2,q}$

2) si $n \geqslant 3$, il existe $q(n)$ tel que $t_{2,q} = T_{2,q}$ pour $q \geqslant q(n)$.

démonstration très technique : regarder $\|\sum e^{-t\psi(g)}f(g)\lambda(g)\|_q^q = \tau\big(((P_t f)^* P_t(f))^{\frac{q}{2}}\big)$

$\to$ argument très combinatoire

1ère Idée : si $\mathbb{F}_n \subset \underbrace{\mathbb{Z}_2 * \dots * \mathbb{Z}_2}_{2n \text{ termes}}$, on a $t_{p,q} \leq 2T_{p,q}$

2e Idée : Si $q_1 \geq 2$, $t_1 > 0$ tq $\|P_{t_1}\|_{2,q_1} \leq 1$, alors $\forall\, 0 < t < t_1\ \forall\, 2 < q < q_1$

$\|P_t\|_{2,q} \leq 1$ avec $t = (1-\vartheta)\cdot 0 + \vartheta t_1$, où ϑ déterminé par $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{q_1}$.

$\rightarrow$ Si $P_{t_1} : L_2 \longrightarrow L_{q_1}$, $f \longmapsto \sum \underbrace{e^{-t_1\psi(g)}}_{a_1(g)} f(g)\lambda(g)$ et $P_0 = \mathrm{Id} : L_2 \longrightarrow L_2$, $a_0(g) = 1$

on peut faire une interpolation complexe (ou à la Stein) : si $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{q_1}$,

$P_t : L_2 \longrightarrow L_q$ est contractant pour $f \longmapsto \sum' a(g) f(g)\lambda(g)$, $a(g) = a_0(g)^{1-\vartheta} a_1(g)^{\vartheta}$

[en fait on définit une famille complexe $T_z f = \sum' a_0^{1-z}(g)\, a_1^{z}(g) f(g)\lambda(g)$ et on utilise le lemme des 3 droites : $\|T_{is} f\| = \|\sum' a_0^{1-is} a_1^{is}(g) f(g)\lambda(g)\|_2 = \sum' |\quad|^2$

$= \sum' |a_0(g)|^2 |f(g)|^2 = \|T_0 f\|^2 \leq \|f\|_2^2$.

$\|T_{1+is} f\|_{q_1} = \|\sum' a_1(g) a_0^{-is}(g) a_1^{is}(g) f(g)\lambda(g)\|_{q_1} \leq \|\sum' a_0^{-is}(g) a_1^{is}(g)\lambda(g)\|_2 = \|f\|_2$

Donc $T_\vartheta f \in (L_2, L_{q_1})_\vartheta = L_q$ et $\|T_\vartheta f\|_q \leq \|f\|_2$.

<u>Conséquence</u> : $G = \mathbb{F}_n$ et $q > 2$: $t_{2,q} < \infty$.

⚠ Les $T_{p,q}$ ne s'interpolent pas : ce n'est pas une f^{n} log-convexe.

<u>Fait</u> : $t_{p,q} = t_{q',p'}$. Donc, pour $G = \mathbb{F}_n$ et $p \in]1,2]$, $t_{p,2} < \infty$.

<u>Fait</u> : Considérons P_t de L_p ds L_q, P_s de L_q ds L_r. Alors P_{t+s} va de L_p ds L_r :

$f \xmapsto{P_t} \sum e^{-t\psi(g)} f(g)\lambda(g) \xmapsto{P_s} \sum e^{-(t+s)\psi(g)} f(g)\lambda(g)$ et

donc $t_{p,r} \leq t_{p,q} + t_{q,r}$ dès que $1 < p < q < r < \infty$

ex : $T_{p,q} + T_{q,r} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{q-1}{p-1} + \log\frac{r-1}{q-1}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{r-1}{p-1}$.

Par conséquent, si $G = \mathbb{F}_n$, $t_{p,q} < \infty$ pour $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$.

$\boxed{\text{Log Sobolev}}$: hypothèse : $\|P_t\|_{2,q} \leq 1$ pour tout $2 < q$ et proche de 2 et tout $t > t(q)$

cela équivaut à $t_{2,q} < \infty$ pour $q > 2$ au voisinage de 2

(LS_2) $\exists c > 0\ \forall f \geq 0$

conclusion : $\tau(|f|^2 \log |f|^2) - \|f\|_2^2 \log \|f\|_2^2 \leq \frac{1}{c} \langle H(f), f\rangle$

(H est la dérivée du sg au pt 0) où $H(f) = \sum_{g \neq e} \psi(g) f(g)\lambda(g)$ $[P_t = e^{-tH}]$

On estime une norme par la norme d'une dérivée.

[Dans le cas gaussien, $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ pour $t_{p,q} = T_{p,q}$]

<u>Réciproq^{t}</u> $(LS_2) \Rightarrow \forall\, 1 < p < q < \infty\ \ t_{p,q} < \infty$

Intéressons-nous à $\| \sum e^{-t\psi(g)} f(g) \lambda(g) \|$

Fait : supposons que $\exists C > 0$ et $\rho > 1$ t.q. $|\{g \in G : \psi(g) \leq R\}| \leq C \rho^R$ pour $R \geq 0$.
Alors $\forall q > 2$ $t_{2,q} < \infty$.

$\psi(G) = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$, $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_{k+1} > n_k$ (par ~~vect~~ entiers)

On veut estimer $\|\cancel{P_t f}\|_q = \| f(e) + \underbrace{\sum_{g \neq e} e^{-t\psi(g)} f(g) \lambda(g)}_{\mathring{f}} \|_q$

Notons $B_k = \{g \in G : \psi(g) \leq n_k\}$ et $S_k = B_k \setminus B_{k-1}$

$\sum'_{k \geq 1} e^{-t n_k} f|_{S_k}$

$$\|\mathring{f}\|_q \leq \sum e^{-t n_k} \underbrace{\| f|_{S_k} \|_q}$$

$$\leq \sum_{g \in S_k} |f(g)| \leq |S_k|^{1/2} \| f|_{S_k} \|_2$$

$$\leq \Big(\sum'_{\geq 1} e^{-2t n_k} \underbrace{|S_k|}_{|B_k| - |B_{k-1}|} \Big)^{1/2} \|\mathring{f}\|_2$$

$$\sum'_{k \geq 1} e^{-2t n_k} (|B_k| - |B_{k-1}|) = \sum'_{k \geq 1} (e^{-2t n_k} - e^{-2t n_{k+1}}) \underbrace{|B_k|}_{\leq C\rho^{n_k} = Ce^{n_k \log \rho}} - e^{-2t}$$

$$\leq C \frac{1}{1 - \frac{\log \rho}{2t}} e^{-2t + \log \rho}$$

$$\|\mathring{f}\|_q^2 \leq C \frac{1}{1 - \frac{\log \rho}{2t}} e^{-2t + \log \rho} \|\mathring{f}\|_2^2$$

A-t-on $\|P_t(\mathring{f})\|_q^2 \leq \underbrace{C \frac{1}{1 - \frac{\log \rho}{2t}} e^{-2t + \log \rho}}_{\text{Ceci est-il } \leq 1 \text{ ??}} \|\mathring{f}\|_2^2$.

Fait : si $q > 2$, $\|f\|_q \leq \big(|\tau(f)|^2 + 4(q-1) \|f - \tau(f)\|_q^2 \big)^{\frac{1}{2}}$.

Donc $\|P_t(f)\|_q^2 \leq |f(e)|^2 + 4(q-1) \|P_t(f) - f(e)\|_q^2$ et ceci ... ≤ 1 ?

Alors $t_{2,q} \leq \frac{1}{2} (\log C_0 + \log C + \log \rho + \log(q-1) + ?]$
← essentiellt négligeable.

Ceci montre que $\forall \delta > 0\ \exists q(\delta)$ $q > q(\delta) \Rightarrow t_{2,q} \leq (1+\delta) T_{2,q}$.

→ Dem du fait : inégalité très naturelle / lissité uniforme : L_q est 2-lisse :

On a l'inégalité de Ball-Carlen-Lieb : si $2 < q < \infty$ $\left(\frac{1}{2} (\|x+y\|_q^q + \|x-y\|_q^q) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\|x\|_q^2 + (q-1)\|y\|_q^2 \right)^{1/2}$

Dualisons-la : si $q < 2$, $\geq$; $\left[\frac{1}{2} (\|a\|_q^q + \|b\|_q^q) \right]^{\frac{1}{q}} \overset{q<2}{\geq} \left(\left\| \frac{a+b}{2} \right\|_q^2 + (q-1) \left\| \frac{a-b}{2} \right\|_q^2 \right)^{1/2}$.

Par dualité, il suffit de mq si $p < 2$, $\|f\|_p \geq \left(|\tau(f)|^2 + \frac{p-1}{4} \|f - \tau(f)\|_p^2 \right)^{1/2}$.

Pour cela, on applique $a = f$, $b = \tau(f)$: $\left(\frac{1}{2} (\|f\|_p + |\tau(f)|) \right)^{\frac{1}{p}} \geq \Big(\underbrace{\|\tau(f) + \tfrac{1}{2}\mathring{f}\|_p^2}_{\geq |\tau(f)|^2} + \underbrace{(p-1) \|\tfrac{\mathring{f}}{2}\|_p^2}_{= \frac{p-1}{4}\|\mathring{f}\|_p^2} \Big)^{1/2}$

car $|\tau(f)| \leq \|f\|_p$. i.e. $\| \int f \| \leq \|f\|_p$.

Q : $4(q-1)$ est-elle la meilleure constante ?... tester sur $f = x + \varepsilon y$.
Le 4 est-il nécessaire ?

$\boxed{\begin{array}{l} \|f\|_\infty \leq (k+1) \|f\|_2 \\ \text{on a pour } q > 2 \\ t_{2,q} \leq \log C_0 + \frac{1}{2} \log (q-1) \end{array}}$ $\boxed{C_0 \leq \sqrt{32}}$

N.B. : si $0 < \alpha \leq 1$, $e^{-t\psi(g)^\alpha}$ marche aussi, t plus grand.

N.B. : $\mathbb{F}_n$ avec $n = \infty$: on n'a plus la croissance exp. mais on peut utiliser l'$\leq$ de Haagerup : prenons $n_k = k$, $\psi(g) = |g|$