

Hypercontractivité et $\leq$ de Sobolev logarithmique

- (M, τ) τ trace normale finie fidèle.
- A C^* -algèbre préfaible dense dans M .
- $(P_t)_{t \geq 0} : A \rightarrow A$ sg fortement continu : (i) P_t est positif et contractant
(ii) $\forall t > 0 \forall f, g \in A \quad \tau(f P_t g) = \tau(P_t f g)$
Alors A est dense dans tous les $L^p = L^p(M, \tau)$, $1 < p < \infty$.

P_t s'étend en un sg de contractions sur tous les L^p , fortement (préfaible si $p = \infty$)
 P_t est autoadjoint sur L^2 .

Rappel: On dit que (P_t) est (strictement) hypercontractant si $\forall 1 < q < p < \infty \exists \tau_{p,q}$
 $\exists c_{p,q} > 0 \forall t > \tau_{p,q} \|P_t\|_{L^q \rightarrow L^p} \leq c_{p,q}$ (respectivement $c_{p,q} = 1$).

Théorème: ① Si (P_t) est hypercontractant, i.e. il existe $d > 0$ tel que $\forall t > 0 \|P_t\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq e^{2d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)})}$
où $q(t) = 1 + e^{\frac{2t}{c}}$, où $c > 0$, alors on a l'inégalité de log-Sobolev notée $LS(c, d)$.

$$\forall f \in L^2_+ \cap D(\mathcal{E}) \quad \langle f, f \ln f \rangle - \|f\|_2^2 \ln \|f\|_2 \leq c \mathcal{E}_2(f, f) + d \|f\|_2^2$$

forme de Dirichlet = $\frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2$

② Réciproquement, si $LS(c, d)$ est satisfaite et si les $\mathcal{E}_p$ sont L^p -réguliers avec $d > 0$,
alors (*) est vérifiée avec d remplacé par $d + cd$. forme de Dirichlet.

N.B. On montrera plus tard que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_p$ sont toujours L^p -réguliers dans ce contexte.

Rappels: Soit $L^p(M, \tau)$ le complété de M pour la norme $\tau(|x|^p)^{1/p}$. C'est aussi l'ensemble
des opérateurs T non bornés, à domaine dense et fermé, affilés à M , tels que $\tau(|T|^p) < \infty$.
Notons $L^p_+ = \{x \in L^p : x = |x|\}$. A_+ est dense dans L^p_+ si $p < \infty$.

Notons $L^{p,sa} = \{x \in L^p : x^* = x\}$. Si $x \in L^{p,sa}$, $\exists (x_+, x_-) \in L^p_+ \times L^p_+$ tel que $x = x_+ - x_-$
(choisis $x_+ = x \vee 0$)

Soit $q \in]1, +\infty[$ et p son exposant conjugué. Alors $\forall f \in L^q \exists ! \phi$ de L^p noté $\phi(f)$,
tel que $\langle \phi(f), f \rangle = \|f\|_q^2$ et $\|\phi(f)\|_p = \|f\|_q$. Si $f \in L^q_+$, $\phi(f) = \frac{f^p}{\|f\|_q^{p-2}}$
Cela résulte de l'uniforme convexité de L^p . On a aussi ϕ_p continue (et même unif. continue
sur les bornés)

Pour $p, q \in [1, +\infty[$, on considère $I_{p,q} : L^q_+ \rightarrow L^p_+$ défini par $I_{p,q}(f) = \phi_p(f)$.

$I_{p,q}$ vérifie : $I_{p,q}$ est continue et bijective et (i) $\|I_{p,q}(f)\|_p^p = \|f\|_q^p$
(ii) $I_{p,p} = \text{id}$, $I_{p,q} I_{q,r} = I_{p,r}$ (iii) Si p, q sont conjugués, $I_{p,q}(f) = \phi_p(f) \|f\|_q^{q-p}$.

Démonstration de la continuité: supposons $q < p$. Rappelons d'Ando: si $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un opérateur monotone, alors $\forall A, B$ matrices ≥ 0 $\forall \|\cdot\|$ unitairement invariante on a $\|f(A) - f(B)\| \leq \|f(|A - B|)\|$. Prenons $a, b \in \mathbb{R}_+^n$: $\|a^q - b^q\|_1 \leq \| |a - b|^q \|_1 \leq \|a - b\|_1^q$

[De la preuve d'Ando, il faut remplacer les normes à la Ky Fan $\|\cdot\|_k$ par $\phi_k(T) = \int \mu_k(T) dt$. Pb: comment passer aux normes L^p : argument de convexité!!
On considère $f(x) = x^{1/p}$: $q < p$: c'est une fonction opérateur-monotone.
Référence: Yves Raynaud: article sur les ultraproducts.

§ Formes de Dirichlet.

Soit $(\mathcal{L}_2, D(\mathcal{L}_2))$ générateur infinitésimal de $\mathcal{P}_t: L^2 \rightarrow L^2$ (contractant)

Comme $\mathcal{P}_t$ est a.s. contractant, $-\mathcal{L}_2$ est positif: $\langle \mathcal{P}_t f, f \rangle \leq \|\mathcal{P}_t f\|_2 \leq \|f\|_2$
et donc $\langle \mathcal{P}_t f - f, f \rangle \leq 0$ et donc $\langle \mathcal{L}_2 f, f \rangle \leq 0$.

• La fermeture de la f. q. n. b. $\mathcal{E}_2(f, f) = \langle -\mathcal{L}_2 f, f \rangle$ est une forme de Dirichlet sur L^2 : $D(\mathcal{E}_2) = D((-\mathcal{L}_2)^{1/2})$.

• Pour $q > 1$, on introduit $\mathcal{E}_q(f, f) = \langle \phi_q(f), -\mathcal{L}_q f \rangle \|f\|_q^{q-2}$

Ceci est appelé forme de Dirichlet généralisée.

Comme $(\mathcal{P}_t)$ est contractant, on a $\forall g \in D(\mathcal{E}_q)$ $\mathcal{E}_q(g, g) \geq 0$:

[Pour tous les sg contractants, $\operatorname{Re}(\langle \phi_q(f), -\mathcal{L}_q f \rangle \|f\|_q^{q-2}) \geq 0$

[Différentiables $f = \| \cdot \|_q$ en $a \in L^q \setminus \{0\}$: si $v \in L^q$, $Df(a).v = \langle \frac{\operatorname{sgn}(a) |a|^{q-1}}{\|a\|_q^{q-1}}, v \rangle_{L^q}$]

Dérivons $\mathcal{P}_t f = e^{t\mathcal{L}} f$: $\|\mathcal{P}_t f\|_q = \|e^{t\mathcal{L}} f\|_q$ et $\frac{d}{dt} \|\mathcal{P}_t f\|_q \Big|_{t=0} = \dots$

Conseil de Xu: Il vaut mieux travailler sur le core de l'opérateur!]

Inégalité de Sobolev logarithmique: on dit qu'une $\leq$ de Sob log est satisfaite dans L^q , $q \in]1, +\infty[$, s'il existe $C > 0$ et $d \geq 0$ tel que pour $f \in L^q_+ \cap D(\mathcal{E}_q)$

(LS_q) $\underbrace{\langle I_{p,q}(f), T_q(f) \rangle}_{\geq C \operatorname{ent}(f)} - \|f\|_q^q \ln \|f\|_q \leq c(q) \mathcal{E}_q(f, f)$

où $c(q) = \frac{Cq}{2(q-1)}$ et $d(q) = \frac{2d}{q}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $d(q) \|f\|_q^q$

et où $D(\cap_q) = \{f \in L^q_+ : f \ln f \in L^q\}$ et $T_q(f) = f \ln f$.

et où $D(T_q) = \{f \in L^q_+ : f \ln f \in L^q\}$

Def: on dit que les formes $\mathcal{E}_q$ sont L^1 -régulières lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall q \geq 2 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_2) \quad \mathcal{E}_q(\underbrace{I_{2,q}(f)}_{\neq q/2}, \underbrace{I_{2,q}(f)}_{\neq q/2}) \leq \frac{q^2}{4(q-1)} \mathcal{E}_q(f, f) + \delta \|f\|_q^q.$$

Lemmes de différentiabilité: Lemme 1: Soit $f \in A_+$. Alors $\frac{d}{dq} \|f\|_q^q = \langle I_{q,q}(f), T_q(f) \rangle = \tau(f^q \ln f)$

Il suffit de mg $\frac{d}{dq} x^q = x^q \ln x$. Or par Taylor Lagrange $\left| \frac{x^{q+s} - x^q}{s} - \frac{1}{s} \ln(x) x^q \right|$
 et $\left\| \frac{x^{q+1} - x^q}{1} - \ln x x^q \right\|_\infty \leq \frac{|s|}{2} V_q \leq \frac{|s|}{2} \sup_{t \in [q, q+1]} |(\ln x) x^t + t x^{t-1}|$

Lemme ^{utile} Soit h une f^n de classe C^1 sur un ouvert O de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et

$\phi: f \mapsto \tau(h(f))$. ϕ est définie sur les $f \in A_{\text{sa}}$ telle que $\sigma(f) \subseteq O$.

Alors $d\phi_f(g) = \tau(h'(f)g)$

Démonstration: il suffit de le montrer pour le polynôme. Soit $U \subset O$. On peut trouver une suite (P_n) de polynômes tels que (P_n) et (P'_n) convergent vers h et h' uniformément sur U . Notons ϕ^n et $d\phi^n$ les applications associées aux P_n et P'_n . Ici $d\phi^n$ et ϕ^n qui convergent uniformément sur l'ensemble des $f \in A_{\text{sa}}$ et tels que $\sigma(f) \subseteq U$

• Puis il suffit de regarder $h: x \mapsto x^n, n \geq 1$: $f \in A_{\text{sa}}, \Delta f \in A_{\text{sa}}$,

$$(f + \Delta f)^n = f^n + \sum_{k=0}^{n-1} f^k \Delta f f^{n-k-1} + O(\|\Delta f\|^2).$$

$$\tau(f + \Delta f)^n = \tau(f^n) + n \tau(f^{n-1} \Delta f) + O(\|\Delta f\|^2).$$

Lemme 3: Soit $f \in A_+ \cap D(\mathcal{E}_{q_0})$ et f inversible. Soit $q = q(t) = 1 + (q_0 - 1)e^{\frac{t}{\tau}}$

$$\text{et } p = p(t) : \frac{1}{p(t)} + \frac{1}{q(t)} = 1. \text{ On a } \frac{d}{dt} \ln \|f\|_q^q \Big|_{t=0} = \frac{q_0/q_0}{1/f(q_0)} \times$$

$$\times \left(\tau(f^{q_0} \ln f) - \|f\|_{q_0}^{q_0} \ln \|f\|_{q_0} - \frac{q_0 c}{2(q_0 - 1)} \mathcal{E}_{q_0}(f, f) \right)$$

(où $q'(0) = q_0$)

Démonstration: $f_t = P_t f$, $\ln \|f\|_q^q = \frac{1}{q} \ln \|f\|_q^q$ et $\frac{d}{dt} \ln \|f\|_q^q \Big|_{t=0} = -\frac{q_0}{q_0} \ln \|f\|_{q_0}^{q_0} + \frac{1}{q_0 \|f\|_{q_0}^{q_0}} \frac{d}{dt} \|f\|_q^q \Big|_{t=0}$

(4)

et $\|f_t\|_q^q = z(f_t^{q(t)})$ et $(t, q) \mapsto z(f^q)$ est dérivable en (t, q_0)

$$\begin{aligned} \text{et on a } \frac{d}{dt} z(f_t^{q(t)}) \Big|_{t=0} &= q_0 z(f^{q_0-1} \mathcal{L}_{q_0} f) + z(f^{q_0} \ln f) \dot{q}_0 \\ &= -q_0 \underbrace{\langle I_{\mu_0, \mu_0}(f), -\mathcal{L}_{q_0} f \rangle}_{\xi_{q_0}(f, f)} + \dot{q}_0 \langle I_{\mu_0, \mu_0}(f), T_{\mu_0}(f) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{et } -\frac{\dot{q}_0}{q_0} = \frac{q_0 c}{2(q_0 - 1)}$$