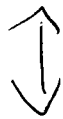


GT AF

21/11/13

Hypercontractivite'



Log-Sobolev

- (M, τ) algèbre de von Neumann finie

$A \subset M$ C^* -algèbre unital w^* -dense

$(P_t)_{t \geq 0}$ C_0 -semigroupe sur A de générateur $-L$

On suppose que

– $\forall t \geq 0, \quad P_t \geq 0 \text{ et } \|P_t\| \leq 1$

– $\forall t \geq 0, \quad P_t(1) = 1$

– $\forall t \geq 0, \quad P_t \text{ est symétrique } (\tau(P_t(\theta)g) = \tau(\theta P_t(g)) \text{ pour}$

tous $\theta, g \in A$)

$\hookrightarrow$ Extension en 1 semigroupe de diffusion autoadjoint

- Lorsque $\theta \in A_+$ inversible, alors $P_t(\theta) \in A_+$ inversible pour tout $t \geq 0$.

- Lorsque $\theta \in \mathcal{D}(L)$, alors $P_t(\theta) \in \mathcal{D}(L)$ pour tout $t \geq 0$.

- Soit $c > 0$, on pose $q(t) = 1 + e^{2t/c}$

Théorème

① Soient $\beta \in A_+$ inversible (ce qui permet de définir $e_n(\beta)$)

et $d \geq 0$. Supp $\beta \in \mathcal{D}(L)$.

Si $\forall t > 0, \quad \|P_t \beta\|_{q(t)} \leq \exp\left(2d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)}\right)\right) \|\beta\|_2$, alors

$$\tau(\beta^2 e_n(\beta)) - \|\beta\|_2^2 e_n \|\beta\|_2 \leq c \tau(\beta L(\beta)) + d \|\beta\|_2^2$$

② Soient $\beta \in A_+$ inversible, $q \geq 2$, $p = \frac{q}{q-1}$ conjugué de q

Supposons $\beta \in \mathcal{D}(L)$ et $\beta^{2/p} \in \mathcal{D}(L)$. Alors

$$\tau(\beta L(\beta)) \leq \frac{q^2}{4(q-1)} \tau(\beta^{2/p} L(\beta^{2/p}))$$

③ Soit $d \geq 0$, supposons que $\forall \beta \in A_+$ inversible, élément de $\mathcal{D}(L)$,

$$\tau(\beta^2 e_n(\beta)) - \|\beta\|_2^2 e_n \|\beta\|_2 \leq c \tau(\beta L(\beta)) + d \|\beta\|_2$$

Soit $\beta \in A_+$ inversible tq $\forall t > 0, \forall \alpha \geq 1, (P_t \beta)^\alpha \in \mathcal{D}(L)$.

Alors $\forall t > 0, \quad \|P_t(\beta)\|_{q(t)} \leq \exp\left(2d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)}\right)\right) \|\beta\|_2$

Lemme - dé

Soient $\beta \in A_+$ inversible, avec $\beta \in \mathcal{D}(L)$.

Soit $q: \mathbb{R}_+ \rightarrow (1, \infty)$ de classe C^1

$$t \mapsto q_t$$

Alors $t \mapsto e_n \|P_t \beta\|_{q_t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e_n \|P_t \beta\|_{q_t}) &= \frac{q'_t}{q_t \|P_t \beta\|_{q_t}^{q_t}} \left(\tau((P_t \beta)^{q_t} e_n(P_t \beta)) \right. \\ &\quad \left. - \|P_t \beta\|_{q_t}^{q_t} e_n \|P_t \beta\|_{q_t} \right) - \frac{\tau((P_t \beta)^{q_t-1} L(P_t \beta))}{\|P_t \beta\|_{q_t}^{q_t}}. \end{aligned}$$

CB Exposé A. Nou, 15/11/13

Démo (1)

On pose $F(t) = \exp \left(-2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)} \right) \right) \|P_t \theta\|_{q(t)}$ pour $t \geq 0$.

Puis $G = \ln F$. Alors

$$G(t) = -2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)} \right) + \ln \|P_t \theta\|_{q(t)}$$

Par le Lemme-clé, G est dérivable. On applique la formule en $t=0$.

$$q(0) = 2, \quad q'(t) = \frac{2}{c} e^{\frac{2t}{c}} \quad \text{donc} \quad q'(0) = \frac{2}{c}.$$

$$\hookrightarrow \frac{q'(0)}{q(0)} = \frac{1}{c}$$

$$\left(-2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)} \right) \right)'_{t=0} = \frac{-2d q'(0)}{q(0)^2} = -\frac{d}{c}.$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow G'(0) &= -\frac{d}{c} + \frac{1}{c \| \theta \|_2^2} \left(\tau(\theta^2 \theta_n(\theta)) - \| \theta \|_2^2 \theta_n \| \theta \|_2 \right) \\ &\quad - \frac{\tau(\theta L(\theta))}{\| \theta \|_2^2} \end{aligned}$$

Par Ryp $F(t) \leq F(0) = \| \theta \|_2$ pour tout $t \geq 0$ donc

$G \leq G(0)$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $G'(0) \leq 0$.

$$\hookrightarrow \frac{1}{c \| \theta \|_2^2} \left(\tau(\theta^2 \theta_n \theta) - \| \theta \|_2^2 \theta_n \| \theta \|_2 \right) \leq \frac{d}{c} + \frac{\tau(\theta L(\theta))}{\| \theta \|_2}$$

$\hookrightarrow$ résultat.

Lemme

Soient $\beta \in A$ normal, $K = \sigma(\beta)$, $T: A \rightarrow A$ application positive. Alors $\exists \mu \in M(K \times K)$ tq $\|\mu\| \leq \|T\|$

et $\forall \varphi, \psi \in C(K)$,

$$\tau(\varphi(\beta) T(\psi(\beta))) = \int_{K \times K} \varphi(s) \psi(t) d\mu(t, s)$$

Démon

Soient $\pi: A \rightarrow B(L^2(\tau))$ mult à gauche ($\pi(a)(y) = ay$)

$\rho: A^{op} \rightarrow B(L^2(\tau))$ " " droite ($\rho(a)(y) = ya$)

Alors π, ρ sont des $*$ -représentations qui commutent.

Soit $\sigma: C(K) \rightarrow A$ le CF continu associé à β .

Alors $T\sigma: C(K) \rightarrow A$ est positif donc complètement positif.

$$\hookrightarrow \|\sigma \otimes T\sigma: C(K) \underset{\min}{\otimes} C(K) \rightarrow A \underset{\max}{\otimes} A^{op}\| \leq \|T\|$$

(On utilise que $C(K)^{op} = C(K)$ et $C(K)$ nucléaire)

Soit $W: A \otimes A^{op} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $W(a \otimes b) = \tau(ab)$.

$$\text{Alors } W(a \otimes b) = \langle 1 \mid \rho(b) \pi(a) 1 \rangle_{L^2(\tau)}$$

donc W s'étend en 1 état encore noté

$$W: A \underset{\text{max}}{\otimes} A^{\text{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Alors $W_0(\sigma \otimes T\sigma): C(K) \underset{\text{min}}{\otimes} C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ est 1

BE ≥ 0 de norme $\leq \|T\|$.

Via $C(K) \underset{\text{min}}{\otimes} C(K) \simeq C(K \times K)$, on obtient $\mu \in M(K \times K)$

représentant cette forme. Alors $\mu \geq 0$, $\|\mu\| \leq \|T\|$ et

pour tous $\varphi, \psi \in C(K)$

$$\tau(\varphi(\theta) T(\psi(\theta))) = W(\varphi(\theta) \otimes T\psi(\theta))$$

$$= W_0(\sigma \otimes T\sigma)(\varphi \otimes \psi)$$

$$= \int (\varphi \otimes \psi) d\mu$$

$$= \int \varphi(t) \psi(s) d\mu(t, s)$$

Démon ②

- On fixe $t > 0$ (pour un temps...) et on définit

$$R: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \longmapsto \tau(\theta^{2-\theta} P_t(\theta^\theta))$$

Le but est de montrer

$$(*) \quad \forall \theta \in [0, 2], \quad R(\theta) \leq (\|B\|_2^2 - R(1)) (\theta - 1)^2 + R(1)$$

Pour cela on applique le lemme avec $T = P_t$.

Soit μ associé (ici $K \subset (0, \infty)$).

$$R(\theta) = \int_{K \times K} t^{2-\theta} s^\theta d\mu(t, s)$$

~~$$R \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall R \gg 1, \forall \theta \in [0, 2]$$~~

~~$$R^{(R)}(\theta) = \int_{K \times K}$$~~

$$= \int_{K \times K} t^2 \left(\frac{s}{t}\right)^\theta d\mu(t, s)$$

$$R \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall R \gg 1$$

$$R^{(2R)}(\theta) = \int_{K \times K} t^2 \left(\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right)^R \left(\frac{s}{t}\right)^\theta d\mu(t, s)$$

$$\text{On en déduit que } \underline{R^{(2R)} \geq 0 \quad \forall R \geq 0.}$$

$$\forall \theta \in [0,1], R(1+\theta) = \tau(\theta^{1-\theta} P_t(\theta^{1+\theta}))$$

$$= \tau(\theta^{1+\theta} P_t(\theta^{1-\theta})) \quad \text{car } P_t \text{ est sym}$$

$$= R(1-\theta).$$

Cette sym/à 1 implique $R^{(R)}(1) = 0 \quad \forall R \in \mathbb{N}^*$ impair.

Par Taylor (R est entière) :

$$R(\theta) = R(1) + \sum_{R=1}^{\infty} \frac{R^{(R)}(1)}{R!} (\theta-1)^R$$

$$= R(1) + \sum_{R=1}^{\infty} \frac{R^{(2R)}(1)}{(2R)!} (\theta-1)^{2R}$$

$$= R(1) + (\theta-1)^2 \sum_{R=1}^{\infty} \frac{R^{(2R)}(1)}{(2R)!} (\theta-1)^{2R-2}$$

$$\leq R(1) + (\theta-1)^2 \sum_{R=1}^{\infty} \frac{R^{(2R)}(1)}{(2R)!} \quad (\text{grâce à la positivité})$$

$$\text{Donc } R(\theta) \leq R(1) + (\theta-1)^2 (R(2) - R(1)).$$

$$\text{Or } R(2) = R(0) = \tau(\theta^2 P_t(1)) = \tau(\theta^2) = \|\theta\|_2^2$$

$$\text{car } P_t(1) = 1, \text{ d'où } (*).$$

• On considère $q \geq 2$, soient p conjugué et $\theta = \frac{2}{q}$.

$$\text{On a } 2-\theta = \frac{2}{p}, \text{ donc } R(\theta) = \tau(\theta^{2/p} P_t(\theta^{2/q}))$$

Par ailleurs $R(1) = \tau(\theta P_t(\theta))$

$$\text{et } 1 - (1-\theta)^2 = 2\theta - \theta^2 = \frac{4}{q} - \frac{4}{q^2} = \frac{4(q-1)}{q^2}.$$

Donc (*) implique

$$\tau(\theta^{2/p} P_t(\theta^{2/q})) \leq (\|\theta\|_2^2 - \tau(\theta P_t \theta)) (\|\theta\|_2^2 + \tau(\theta P_t \theta))$$

$$\begin{aligned} \tau(\theta^{2/p} P_t(\theta^{2/q})) - \|\theta\|_2^2 &\leq (1 - (1-\theta)^2) (\tau(\theta P_t(\theta)) - \|\theta\|_2^2) \\ &\leq \frac{4(q-1)}{q^2} (\tau(\theta P_t \theta) - \|\theta\|_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \tau(\theta^{2/p} (P_t - I) \theta^{2/q}) \leq \frac{4(q-1)}{q^2} \tau(\theta (P_t - I) \theta)$$

$$\text{Donc } \tau\left(\theta \cdot \left(\frac{I - P_t}{t}\right) \theta\right) \leq \frac{q^2}{4(q-1)} \tau\left(\theta^{2/p} \left(\frac{I - P_t}{t}\right) \theta^{2/q}\right)$$

d'où le résultat en faisant $t \rightarrow 0^+$.

Démon (3)

- On pose $q_t = q(t) = 1 + e^{2t/c}$, alors $q'_t = \frac{2}{c} e^{2t/c}$ donc

$$q'_t = \frac{2(q_t - 1)}{c}.$$

- On considère $\beta \in A^+$ universelle t.q. $\forall t \geq 0, \forall \alpha \geq 1$,
 $(P_t \beta)^\alpha \in \mathcal{D}(L)$. On pose $\beta_t = P_t \beta$. Alors $\forall t \geq 0$,

$\beta_t^{q_t/2} \in \mathcal{D}(L)$ et $\beta_t^{q_t/2}$ est positif et universelle. On lui

applique l'hypothèse "Log-Sobolev" :

$$\begin{aligned} \tau(\beta_t^{q_t} \rho_n(\beta_t^{q_t/2})) - \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t} \rho_n \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t/2} \\ \leq c \tau(\beta_t^{q_t/2} L(\beta_t^{q_t/2})) + d \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t} \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(\beta_t^{q_t} \rho_n(\beta_t)) - \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t} \rho_n \|\beta_t\|_{q_t} &\leq \frac{2c}{q_t} \tau(\beta_t^{q_t/2} L(\beta_t^{q_t/2})) \\ &\quad + \frac{2d}{q_t} \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t}. \end{aligned}$$

- On pose $\Gamma(t) = \rho_n \|\beta_t\|_{q_t}$ pour $t \geq 0$.

Pour le Lemme-clé et ce qui précède,

$$\begin{aligned} \Gamma'(t) &\leq \frac{q'_t}{q_t \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t}} \left(\frac{2c}{q_t} \tau(\beta_t^{q_t/2} L(\beta_t^{q_t/2})) + \frac{2d}{q_t} \|\beta_t\|_{q_t}^{q_t} \right) \\ &\quad - \frac{\tau(\beta_t^{q_t-1} L(\beta_t))}{\|\beta_t\|_{q_t}^{q_t}} \end{aligned}$$

D'après (2) :

$$\tau(\theta_t^{q_t/2} L(\theta_t^{q_t/2})) \leq \frac{q_t^2}{4(q_t-1)} \tau(\theta_t^{q_t/p_t} L(\theta_t))$$

$$\frac{q'_t}{q_t} \cdot \frac{2c}{q_t} \cdot \frac{q_t^2}{4(q_t-1)} = \frac{q'_t c}{2(q_t-1)} = 1 \quad \text{et} \quad q_t/p_t = q_t - 1$$

donc ceci implique $\Gamma'(t) \leq \frac{2d q'_t}{q_t^2}$.

- Soit $t > 0$. Par ce qui précède,

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + \int_0^t \Gamma'(s) ds$$

$$\leq \Gamma(0) + 2d \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)^2} ds$$

$$= \Gamma(0) - 2d \left(\frac{1}{q(t)} - \frac{1}{q(0)} \right)$$

Or $q(0) = 2$, $\Gamma(0) = \ln \|\theta\|_2$ donc

$$\ln \left(\frac{\|\theta_t\|_{q_t}}{\|\theta\|_2} \right) \leq 2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)} \right)$$

$\hookrightarrow$ Résultat.

R_q

On doit pouvoir adapter ③ pour

obtenir l'hypercontractivité

$$L_p \rightarrow L_q$$

(pas seulement $p=2$).