Yulia 1

28/11/2013

Les mesures de Brown.

I) Rappel

Rappel: Si $T \in B(H)$ est normal, alors il existe une mesure spectrale qui à tout borélien $F \subset \sigma(T) \subset \mathbb{C}$ associe $E_F \in B(H)$ projection de sorte que $T = \int_{\sigma(T)} z \, dE(z)$, dans le sens que $\langle T\xi, \eta\rangle = \int z \, d\langle E(z)\xi, \eta\rangle$ pour tous $\xi, \eta \in H$.

Passons au cas non normal: M avN muni d'une trace τ semifinie fidèle normale et $L^p(M,\tau) = \{T : \|T\|_p = (\tau|T|^p)^{1/p} < \infty\}$ et $L^{p,\infty}(M,\tau) = L^p(M,\tau) \cap M$.

Théorème: Soit $T \in L^1(M,\tau)$. Alors il existe une unique mesure sur $\sigma(T) \setminus \{0\}$ telle que (i) $\tau(T) = \int_\sigma w \, d\mu(w)$ et (ii) $\tau \circ f(T) = \int f(w) \, d\mu(w)$ pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de $\sigma(T)$ telle que $f(z) = O(z)$ pour $z \to 0$ si $0 \in \sigma(T)$

et (iii) $\tau(\log|1 - zT|) = \int \log|1 - zw| \, d\mu(w)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

et (iv) $\int |w|^p \, d\mu(w) \leq \tau(|T|^p)$ pour $p \in]0, \infty[$.

Si T est normal, $\mu = \tau \circ E_T$

Plan de la démonstration: on définit $u(z) = \tau \circ \log|1 - zT|$; on démontre que u est sous-harmonique, on considère la mesure de Riesz μ_0 de u: on a $u(z) = \int_F \log|z - w| \, d\mu_0(w) + h_F(z)$, où h est harmonique; on posera $\mu(F) = \mu_0\left(\frac{1}{F}\right)$

on fera des estimations de normes.

L'article initial de Brown est très bien écrit.

II) Les fonctions sous-harmoniques

Les fonctions sous-harmoniques $u : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, D domaine.

Déf.: u est harmonique si $u \in C^2(D)$ et $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Ex.: 1) partie réelle et partie imaginaire d'une fonction holomorphe f.

2) $u(z) = \log|z| = \frac{1}{2}\log|z|^2$ est harmonique dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Si u est harmonique, u est analytique réelle

Principe du maximum : Si u est harmonique dans un voisinage du disque $D(z_0,R)$, alors $u(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z-z_0|=R} u(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{it})\,dt$

<u>Déf</u> : $u : D \to [-\infty,+\infty]$ est <u>sous-harmonique</u> si

- u est s.c.s : $u^{-1}[\alpha,+\infty]$ est fermé pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$
- si $z_0\in D$, il existe $\varepsilon>0$ tel que si $r\in]0,\varepsilon[$ alors $u(z_0)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{it})dt$

<u>Fait</u> : - si $u\in C^2(D)$, alors u sous-harmonique $\Leftrightarrow \Delta u\geq 0$
- u est harmonique ssi u et $-u$ sont sous-harmoniques.

<u>Th</u> : (Riesz) Si u est sous-harmonique dans $D\subset\mathbb{C}$, $u\not\equiv-\infty$, il existe une unique mesure borélienne $\mu\geq 0$ sur D telle que pour tout compact $F\subset D$ on a $u(z)=\int_F \log|z-w|\,d\mu(w) + h_F(z)$ pour $z\in D$, où h_F est holomorphe dans D.

Dans la preuve on définit $L_u(v)=\int_D u\,\Delta v\,dz$ pour $v\in C^\infty(D)$ par le théorème de Riesz, il existe une unique μ telle que $L_u(v)=\int v(z)\,d\mu(z)$.

Si $v\in C_0^\infty(D)$ et $u\in C^2$, $\int u\Delta v=\int v\Delta u$.

III Déterminant de Fuglede - Kadison (1952).

[Si On suppose τ finie : $\tau(1)=1$. voir Dixmier] Considérons la norme $\|\cdot\|_{p,\infty}=\|\,|\cdot|\,\|$ sur $L_{p,\infty}$ et la topologie correspondante sur $1+L_{p,\infty}$.

On définit le déterminant de Fuglede-Kadison $\Delta(A)=\exp\tau\circ\log|A|$ ou $\log\Delta(A)=\tau(\log|A|)$ (si $\tau\circ\log|A|=-\infty$, on pose $\Delta(A)=0$)

<u>Lemme</u> : Soit $f : D\subset\mathbb{C}\to M$ $\mathbb{R}$-analytique, ≥ 0, et soit $z_0\in D$ telle que $f(z_0)$ soit inversible. Soit $\log z$ comme la branche de log telle que $\log 1=0$. Alors $\log f$ est C^∞ et $\frac{\partial}{\partial v}\log f(z_0)=f(z_0)^{-1}\frac{\partial f}{\partial v}(z_0)$.

~~Lemme~~ : Soit $S\in L_{1,\infty}$. Alors $\log\Delta e^S=\mathrm{Re}\,\tau(S)$

Dém. on pose $f(t)=2\tau\log|e^{tS}|$ et $g(t)=2t\,\mathrm{Re}\,\tau(S)$.
On montre que $f'(t)=g'(t)$ pour $t\in\mathbb{R}^{+*}$. $f'(t)=\frac{d}{dt}2\tau(\log|e^{tS}|)=\tau\circ\frac{d}{dt}(2\log|e^{tS}|)$
$=\tau\circ\frac{d}{dt}\circ\log(e^{tS^*}e^{tS})=\tau((e^{tS^*}e^{tS})^{-1}\frac{d}{dt}(e^{tS^*}e^{tS}))$

$$= \tau\left(e^{-tS}e^{-tS^*}\left[S^*e^{tS^*}e^{tS}+e^{tS^*}Se^{tS}\right]\right) = \tau\left(e^{-tS^*}\left[e^{tS^*}S^*e^{tS}+e^{tS^*}Se^{tS}\right]e^{-tS}\right)$$

$$= \tau(S^*+S) = 2\,\mathrm{Re}\,\tau(S) = g'(t)$$ et $g(0)=f(0)$ implique que $f(1)=\int_0^1 f' = \int_0^1 g' = g(1)$.

<u>Lemme 3</u> : $\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ pour $A, B \in 1+L_{1,\infty}$ inversibles

<u>Demonstration</u>: Posons $A = U|A|$, $B=|B^*|V$ avec U, V unitaires.

Alors $\Delta(A)\Delta(B) = \Delta(|A|)\Delta(|B^*|)$ et $\Delta(AB)=\Delta(U|A|\,|B^*|V) = \Delta(|A|\,|B^*|)$

on peut ainsi admettre que $A, B \geq 0$: [on a utilisé ici $\log\Delta(A) = \tau\log|A|$ et
$\tau(\log(V|A|V^*)) = \tau(V\log|A|V^*)$
"le calcul fonctionnel est un homomorphisme"]

De plus $(\Delta(AB))^2 = \Delta(|AB|^2) = \Delta(B^*A^*AB) = \Delta(BA^2B)$ et $\Delta(A)^2 = \Delta(A^2)\Delta(B^2)$

A-t-on $\log\Delta(BAB) = 2\log\Delta(B)+\log\Delta(A)$?
$\qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$
$\quad \tau\circ\log(BAB) \qquad 2\tau\log B + \tau\log A$

On définit S par $A=e^S$, $S\in M_{sa}$ et on a $f(t) = \tau\circ\log(Be^{tS}B)$
$g(t) = \tau\circ\log e^{tS} + 2\tau\circ\log(B)$
$= t\,\tau(S) + 2\tau\circ\log(B)$

et on a $f'(t) = g'(t)$, $f(0)=g(0)$, de sorte que $f(0)=g(0)$ et $f(1)=g(1)$.

<u>Lemme 4</u> : $\log\Delta(\cdot)$ est $\mathbb{R}$-analytique (C^∞) dans la $L_{1,\infty}$-topologie quand restreinte aux éléments inversibles. Si $A: D\subset\mathbb{C}\longrightarrow 1+L_{1,\infty}$ est holomorphe à valeurs inversibles, alors $\log\Delta A(\cdot)$ est harmonique.

<u>Demonstration</u>: par le lemme 3, il suffit de considérer un voisinage de 1 : si $\|A-1\|<1$, alors $\log\Delta(A) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\tau((A-1)^n)$.

(Reference: Akemann, Anderson, Pedersen[82]) Triangle ~~...~~ $\leq$, J. Lin. Multilin Alg.
(Cf Löwner) (cf Haagerup-Schultz)

Remarques : 1) comment prouver $|A|\geq|A| \Rightarrow \Delta(A)\geq\Delta(B)$
2) $\tau\circ\log|1+T| \leq \tau\circ\log(1+|T|)$: