

Lemme 1 : Soit $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow 1 + L_{1,\infty}^{HNL_1}$ différentiable avec $f(z_0)$ inversible :

on suppose qu'une branche de $\log$ est définie en un v. de $O(f(z_0))$ tel que $\log 1 = 0$.

Alors $\log \circ f$ est dérivable en z_0 et $\frac{\partial}{\partial v} z \cdot \log \circ f(z_0) = z (f(z_0)^{-1} f'_v(z_0))$.

Dem : Par le calcul fonctionnel holomorphe, $\Gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} F(t) (t-a)^{-1} dt$ contour $\gamma(f(t))$ pour t ds le voisinage. Pour $F = \log$, $\log f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \log w (w-f(z))^{-1} dw$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{\partial}{\partial v} z \cdot \log \circ f(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \log w \cdot \frac{1}{(w-f(z_0+t))^{-1} - (w-f(z_0))^{-1}} dw \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \log w \left[z \left((w-f(z_0+t))^{-1} - (w-f(z_0))^{-1} \right) \right] dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \log w \left[z \left((w-f(z_0))^{-2} f'_v(z_0) \right) \right] dw \\ &= z \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \log w (w-f(z_0))^{-2} dw \right) f'_v(z_0) = z (f(z_0)^{-1} f'_v(z_0)) \end{aligned}$$

N.B. : $0 \leq A \leq B \Rightarrow \log A \leq \log B \Rightarrow \Delta(A) \leq \Delta(B)$

Prop: $\log \Delta$ est semi-continue supérieurement sur $1 + L_{1,\infty}$

Dem: Soit $A \in 1 + L_{1,\infty}$ et $T = A^{-1}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $f_\varepsilon(A) = \frac{1}{2} \log \Delta(A^2 + \varepsilon T T^2)$

On montrera que $f_\varepsilon \downarrow \log \Delta$ et f_ε continue implique la proposition

• $f_\varepsilon \downarrow$ • $f_\varepsilon \geq \log \Delta(A) = \frac{1}{2} \log \Delta(A^2)$

• $|A|^2 + \varepsilon |T|^2 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon} |1 + (1+\varepsilon)T|^2 \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ et est donc inversible

Il reste à mg $\inf_{\varepsilon > 0} f_\varepsilon(A) = \log \Delta(A)$

On choisit $B > |A|^2$ inversible tel que $\log \Delta B^{\frac{1}{2}} < \log \Delta(A) + \varepsilon$

[prendre B fonction de $|A|$] Alors $f_\varepsilon(A) = \frac{1}{2} \log \Delta(|A|^2 + \varepsilon T T^2) \leq \frac{1}{2} \log \Delta(B + \varepsilon T T^2)$

$$\text{Alors } \inf_{\varepsilon} f_\varepsilon(A) \leq \inf_B \frac{1}{2} \log \Delta B = \lim_{B \rightarrow A} \frac{1}{2} \log \Delta B = \log \Delta(A)$$

Prop3 $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ si $A, B \in 1 + L_{1,\infty}$

Rem: On peut se limiter à $A, B \geq 0$. Considérons $f_n(u) = \max(u, \frac{1}{n})$.

De $(\Delta(AB))^{\frac{1}{n}} = \Delta(BA^{\frac{1}{n}}B)$ on déduit $\Delta(f_n(A)B) \geq \Delta(AB)$

Où $A^{-1} \in L_1$ et $f_n(A) = 1 + f_n(A-1)$.

On a $f_n(A) \downarrow A, \Delta(f_n(A)B) \rightarrow \Delta(AB)$

$f_n(B) \downarrow B, \Delta(f_n(A)f_n(B)) \rightarrow \Delta(f_n(A)B)$

$\Delta(f_n(A))\Delta(f_n(B)) \rightarrow \Delta(A)\Delta(B)$

~~Lemma 6~~ Soient $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in B(H)$ tels que $\sum |A_k|^2$ est inversible

Alors $(\sum B_k^* A_k) (\sum |A_k|^2)^{-1} (\sum A_k^* B_k) \leq \sum |B_k|^2$

Dém: Soit $\bar{A} = A_k (\sum |A_k|^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \in B(H, H^n)$

Rem $\bar{A}^* \bar{A} = 1 = (\bar{A}_1^* \dots \bar{A}_n^*) \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} = \sum \bar{A}_k^* \bar{A}_k = (\sum |A_k|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum A_k^* A_k (\sum |A_k|^2)^{\frac{1}{2}} = 1$

et donc $\bar{A} \bar{A}^* \leq 1$ et donc $B^* \bar{A} \bar{A}^* B \leq B^* B$ et donc $\sum |B_k^* A_k| (\sum |A_k|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum |A_k|^2 (\sum |A_k|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq \sum |B_k|^2$

Lemma 7 Soient $A_1, \dots, A_n$ holomorphes, tels que

$A_1(z) \in 1 + L_{1,\infty}$ et $A_k(z) \in L_{1,\infty}$. Si $\sum |A_k(z)|^2$ est inversible partout, alors $\log \Delta(\sum |A_k(z)|^2) = u(z)$ est sous-harmonique

Dém: $u(z) = \frac{1}{2} \log (\sum |A_k(z)|^2)$: on a $u \in C^\infty(D)$. Montrons que

$\Delta u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u \geq 0$

$\frac{\partial}{\partial z} u = \frac{1}{2} \left((\sum A_k^*(z) A_k(z))^{-1} \left[\sum (\frac{\partial}{\partial z} A_k^*(z) A_k(z) + A_k^*(z) \frac{\partial}{\partial z} A_k(z) \right] \right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \dots = \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_k \right)^* \dots$ et $A^*(z+h) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(z) \frac{h^k}{k!} \right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} (f^{(k)}(z))^* \frac{h^k}{k!}$

$= \frac{1}{2} \left((\sum |A_k|^2)^{-1} \sum A_k^*(z) A_k'(z) \right)$ et $\frac{1}{4} \Delta u = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \left((\sum |A_k|^2)^{-1} \left(\sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_k^* A_k' + A_k^* \frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_k' \right) \right)$

Utilisons $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f^*(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(z+tv)^* - f(z)^*]$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(z+tv)^* (1 - f(z+tv) f(z)^{-1}) f(z)^{-1}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(z+tv)^* (f(z) - f(z+tv)) f(z)^{-1}$
 $= f(z)^* (-f'(z)) \cdot f(z)^{-1}$

On applique le lemme 6 avec $B_k = A_k'$: $(\sum A_k'^* A_k) (\sum |A_k|^2)^{-1} (\sum A_k^* A_k') \leq \sum |A_k'|^2$

et $\tau(u) = \frac{1}{2} \left((\sum |A_k|^2)^{-1} (\sum |A_k'|^2) \right) = \frac{1}{2} (\sum |A_k'|^2) \geq 0$

et donc $\Delta u \geq 0$ et u est sous-harmonique.

Th 1: Soit $A: D \rightarrow 1 + L_{1,\infty}$ holomorphe. Alors $\log \Delta |A|^2$ est sous-harmonique.

N.B.: on a laissé tomber l'hypothèse d'inversibilité.

Dém: Posons $u(z) = \log \Delta |A(z)|^2$ et $T(z) = A(z) - 1$ et $z \in D$ et

$u_\varepsilon(z) = \log \Delta (|A(z)|^2 + \varepsilon |T(z)|^2) \geq \log \Delta |A(z)|^2$, par le lemme, u_ε est sous-harm. et $u \leq u_\varepsilon$ donc u est sous-harmonique.

Cor: $\log \Delta$ est pluri-sous-harmonique sur son domaine dans $L_{1,\infty}$,

c'est-à-dire 1) si A est holomorphe à valeurs dans $\text{Dom } \log \Delta$, $\log \Delta(A)$ est sous-harmonique (car $\log \Delta(A) = \frac{1}{2} \log \Delta |A|^2$).

IV Estimation

Soit $T \in L_{p,\infty} = \mathcal{M} \cap L^p(\mathcal{M})$ avec $p \in]0, \infty[$ et $h \geq 1$ entier.

Posons $g_h(w) = (1-w)e^{\frac{w}{h-1} + \frac{w^{h-1}}{h-1}}$ (si $h=1$, $g_h(w) = 1-w$).
 - facteurs élémentaires de Weierstrass.

Soit $u(z) = \log \Delta g_h(zT)$ (si $h=1$, $u(z) = \log \Delta (1-zT)$)
 ou 1 ?

Si $z^{-1} \in \sigma(T)$, $g_h(zT)$ est inversible. Alors dans $\{z : z^{-1} \notin \sigma(T)\}$ u est sous-harmonique (prop 1).

et $g_h(w) - 1 = O(w^h)$ pour $w \rightarrow 0$ (si $h=1$ puis récurrence).

$$g_{h+1}(w) = g_h(w) e^{\frac{w^h}{h}} = (1 + O(w^h)) \times (1 + O(w^h)).$$

Vous verrez la prochaine fois pourquoi u est sous-harmonique.

Il faut voir pourquoi $|f(z)| \leq C|z|^h$ implique que $f \in \mathcal{H}^1$.

$$\text{On a } \|f(zT)\| \leq C \sup_{\substack{w \in \sigma(T) \\ |zT| < |w|}} |f(w)|^{h-1} \text{ et } f(zT) = \int |f(zw)| dw \leq \int |f(w)|^h dw = \|f\|_h^h < \infty$$

La formule de la mesure est la même de Riesz de u , $d\mu(w) = \frac{1}{2\pi} d\mu_0(\frac{1}{w})$ (car $h \geq 1$).

Alors μ est une mesure ≥ 0 sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, finie sur les compacts $\neq \emptyset$,

à support $\sigma(T) \setminus \{0\}$. Si T est quasinilpotent (c'est-à-dire $\|T^n\|^{1/n} \rightarrow 0$), alors $\mu = 0$.