Yulia
19 12 2013

Soit $T \in L_{1,\infty}$ (i.e., $p=1=q$) et $g_n(z) \equiv g(z) = 1-z$.

Introduisons des f^{ns} u_n comme suit : soit ρ racine n^e primitive de 1 et
$u_n(z) = \sum_{j=0}^{m-1} u(\rho^j z)$ et $u_n^+(z) = \max(0, u_n(z))$, où $u(z) = \tau \circ \log|1-zT|$

<u>Lemme</u> : $u_n^+(z) = \mathcal{O}(|z|^r)$ au $\mathcal{V}(\infty)$.

Dém : on montre que $u_n(z) = \tau \circ \log|1-z^nT^n|$ et $u_n(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \log \circ \Delta(1-\rho^j zT)$:

on a $v_n(z) = \log \Delta(1-z^nT^n)$ car $1-\omega^n = (\rho-\omega)(\rho^2-\omega)\cdots(\underset{1}{\rho^n}-\omega)(-1)^n$ $= \log \Delta \prod_{j=0}^{n-1}(1-\rho^j zT)$

Il suffit de considérer $n=1$ pour l'asymptotique. $= \log \Delta\left[1-\sum_j' + \sum_{j,k} - \sum_{jkl} + \dots\right]$

puisque ~~Alors~~ $u_{n,T}(z) = u_{1,T^n}(z^n) = o(|z^n|) = o(|z|^r)$.

On a $u_1(z) = u(z) = \tau \circ \log|1-zT| \overset{(*)}{\leq} \tau \circ \log(1+|zT|) = \int \log(1+|z|x)\,d\lambda(x)$

où $\lambda_{|T|} = \tau \circ E_{|T|}$. On a $T \in L^1 \Rightarrow \tau(T) = \int x\,d\lambda(x)$ et $\lambda[\varepsilon,+\infty[< \infty$ pour $\varepsilon > 0$

Donc $\int \log(1+|z|x)\,d\lambda(x) = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$; on fixe $\delta > 0$, soit $\varepsilon > 0$ tel que

$\int_0^\varepsilon x\,d\lambda(x) < \delta$: alors $\int_0^\varepsilon \log(1+rx)\,d\lambda(x) < r\int_0^\varepsilon x\,d\lambda(x) < \delta r$

pour $\int_\varepsilon^\infty$, si $r > \frac{1}{\varepsilon}$, alors $rx > 1$ sous l'intégrande et donc

et $\int_\varepsilon^\infty \log(1+rx)\,d\lambda(x) \leq \int_\varepsilon^\infty \log(2rx)\,d\lambda(x) = \log(2r)\lambda[\varepsilon,+\infty[$ $+ \underbrace{\int_\varepsilon^\infty \log x\,d\lambda(x)}_{<\infty} = o(r)$

L'inégalité $(*)$ se déduit de Akemann Anderson Pedersen :

<u>Triangle $\leq^{ies}$</u> 1982 : Th : Si M est une avN et $x,y \in M$, il existe des isométries $v, w \in M$ telles que $|x+y| \leq v|x|v^* + w|y|w^*$.

Pour déduire $\tau \circ \log|1+T| \leq \tau \circ \log(1+|T|)$,

On pose $x = 1$ et $y = T$: on a $|1+T| \leq vv^* + w|T|w^* \leq 1 + w|T|w^*$

On représente log par une série entière centrée en $\|T\|+1$:

$\forall n$ $\tau((1+w|T|w^* - (1+\|T\|))^n) = \tau((w|T|w^* - \|T\|)^n)$
$= \tau((w^*w|T| - \|T\|)^n)$
$= \tau((|T| - \|T\|)^n)$

Donc $\tau \circ \log(1+w|T|w^*) = \tau \circ \log(1+\underset{1}{\underbrace{w^*w}}|T|) = \tau \circ \log(1+|T|)$

Lemme 9 : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \le \tau(\log_+ r|T|)$ pour tout $r>0$

où $\log_+ x = \max(0, \log x)$.

Dem : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi^j re^{i\theta})\,d\theta$ pour tout j.

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} u_n(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi n}\tau\circ\log|1-r^n e^{in\theta}T^n|\,d\theta$$

$$\le \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\tau\circ\log(1+r^n|\underbrace{e^{in\theta}T^n}_{|T^n|}|)\,d\theta = \frac{1}{n}\tau\circ\log(1+r^n|T^n|)$$

$$\le \frac{1}{n}\tau\circ\log(1+r^n|T|^n) = \frac{1}{n}\int\log(1+r^n x^n)\,d\lambda(x)$$

Si $x<\frac{1}{r}$, $\log(1+r^n x^n) \le r^n x^n \le rx$ $\quad\left(\int x\,d\lambda(x)<\infty\right)$

Par le th de convergence dominée, $\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{r}}\log(1+r^n x^n)\,d\lambda(x) \to \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{r}}\log 1\,d\lambda(x)=0$

et $\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{r}} \to 0$. Si $x\ge\frac{1}{r}$, $\log(1+r^n x^n)\le\log(2r^n x^n) = \log 2 + n\log rx$

et donc $\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{r}}\sim \le \frac{1}{n}\log 2\,\lambda[\frac{1}{r},+\infty[+ \int_{\frac{1}{r}}^{\infty}\log rx\,d\lambda(x) \to \int_{\frac{1}{r}}^{+\infty}\log rx\,d\lambda(x)$

$$= \int\log_+(rx)\,d\lambda(x) = \tau\circ\log_+(r|T|).$$

Lemme 10 (non démontré) Soit u sous-harmonique dans $\mathbb{C}$, $u(0)=0$, u harm. dans un $V(0)$; soit μ_0 la mesure de Riesz de u ; alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta = \int\log_+\frac{r}{|w|}\,d\mu_0(w) \text{ pour tout } r>0$$

Idée : appliquer Poisson-Jensen, voir Hayman & Kennedy p 120 pour $\xi=0$.

Prop. 4 : Soient u et μ_0 comme dans le lemme 10 ; on suppose que $\int\frac{1}{|w|}d\mu_0(w)<\infty$, que $\int\frac{1}{|w|}d\mu_0(w)<\infty$, et que $u(z)=O(z)$ au $V(0)$ et que $u_n^+(z)=o(|z|^n)$ au $V(\infty)$.

Alors $u(z) = \int\log|1-\frac{z}{w}|\,d\mu_0(w)$

Rappel : on a $u(z)=\tau(\log|1+zT|) = \frac{1}{2}\log\Delta(1+T)^2$

Dem : notons $v(z)$ l'intégrale ci-dessus : $u=v+h$ avec h harmonique (th Riesz).

On a $v_+(z) = \max(v(z),0) = o(|z|)$ au $V(+\infty)$ car $v(z) = \int_{\substack{|w|\le R\\(1)}} + \int_{\substack{|w|>R\\(2)}}$

et (1) : $\int_{|w|\le R} \le \int_{|w|\le R}|\frac{z}{w}|\,d\mu_0(w) < \varepsilon$ pour R assez petit.

et (2) $\int_{|w|>R}\log|1-\frac{z}{w}|\,d\mu_0(w) \le \int_{|w|>R} C\,|\frac{z}{w}|^{\frac{1}{2}}\,d\mu_0(w) \le C_1|z|^{\frac{1}{2}}$ ~~pour~~ $= o(|z|)$ au $V(+\infty)$ pour tout R.

v sous-harmonique implique que $0 = v(0) \leq \frac{1}{\pi}\int v(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} v_+(re^{i\theta})\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} v_-(re^{i\theta})\,d\theta$

où $-v_-(t) = \min(0, v(t))$. On a donc $\int v_- \leq \int v_+$ et $\int |v| = \int v_+ + \int v_- \leq 2\int v_+$

De même $\int\limits_{\text{harmonique}} |u_n| = o(r^n)$ pour tout $n \geq 1$ et en particulier pour $u_1 = u$. $= o(r)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

Toute fonction entière $\tilde{h}$ a un développement $\tilde{h}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m |z|^m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} b_m |z|^m \sin m\theta$ où $z = |z|e^{i\theta}$.

là $a_m = \frac{1}{\pi r^m}\int_0^{\pi} h(re^{i\theta})\cos m\theta\,d\theta$ et $b_m = \frac{1}{\pi r^m}\int h(re^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta$.

Donc h, si m est un multiple de n, $a_m(h) = \frac{1}{n} a_m(h_n)$ si $h_n = \sum_{j=0}^{n-1} h(\rho^j z)$.

$b_m(h) = \frac{1}{n} b_m(h_n)$

et on a aussi $u_n = v_n + h_n$ et $\int_0^{\pi} |h_n(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \int |u_n| + \int |v_n| = o(r^n)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

là $a_m(h) = \frac{1}{n} a_m(h_n) = \frac{1}{n\pi r^m}\int |h_n| = o\left(\frac{r^n}{n r^m}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$ pour chaque $n \geq 1$.

et en posant $m = n$, $a_m(h) = o(1) = 0$ pour $m \geq 1$.

Donc $m = 0$, $u(0) = v(0) + h(0)$ et $u(0) = v(0) = 0$ et donc $h \equiv 0$.

Passons à τ :

$\underline{\text{V}}$: Les formules pour τ et μ.

Déf : les $\underline{s\text{-nombres}}$ d'un opérateur T définis par Thierry Fack en 1983 (JFA) sont définis ainsi : il existe $s_T :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ décroissante telle que

$\rho[\{t : s_T(t) > x\}] = \tau \circ E_{|T|}(]x,+\infty[)$

(ρ : mesure de Lebesgue.)

Alors $s_T \to 0$ pour $x \to \infty$ ssi $T \in \{L_{1,\infty}\}^{q.ll.}$. Dans ce cas-ci, $\tau(E_{|T|,F}) = \rho(\{t : s_T(t) \in F\})$

pour tout borélien F, $F \subset]0,\infty[$.

$\underline{\text{Proposition}}$: Pour toute $f \geq 0$ borélienne, nulle en 0, $\int f(s_T(u))\,du = \tau \circ f(|T|)$

$\underline{\text{Dem}}$: $\tau \circ f(|T|) = \int f(|x|)\,d\lambda_{|T|}(x) = \int_0^{\infty} f(s_T(u))\,d\rho(u)$.

par mesure image : $\lambda = \rho \circ s_T^{-1}$

$\underline{\text{Th}}$: Soit φ une f^{n} croissante sur $[0,+\infty[$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(e^t)$ soit convexe.

Alors $\int \varphi(|w|)\,d\mu(w) = \int \varphi\left(\frac{1}{|w|}\right) d\mu_f(w) \leq \tau(\varphi(|T|))$

$\underline{\text{Dem}}$: On définit s_1 par $\rho(\{x : s_1(x) \geq t\}) = \mu(\{w : |w| \geq t\})$

Alors $s_1 \downarrow$. Soit $r > 0$: $\int_0^{+\infty} \log_+(r s_1(u))\,du = \int \log_+(r|w|)\,d\mu(w) = \int \log_+\left(\frac{r}{|w|}\right) d\mu_f(w)$

$$\underset{\text{Lemme 10}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \underset{\text{Lemme 9}}{\leq} \tau\circ\log_+(r|T|) = \int \log_+(r\,S_T(x))\,dx$$

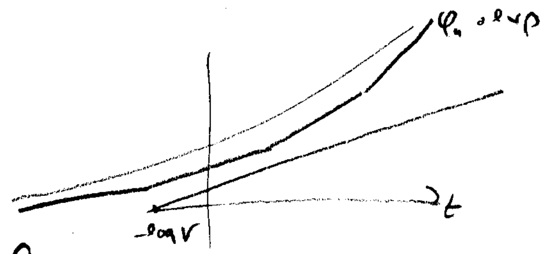
On a donc la formule pour $\varphi(x) = \log_+(rx)$, $r>0$.

Pour φ comme ds l'énoncé, on définit $\varphi_n \uparrow \varphi$ telle que $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_{k,n} \log_+(r_{k,n}x)$

avec $r_{k,n} > 0$, $c_{k,n} > 0$. Comment le faire ?

$\varphi_n \to \varphi \Leftrightarrow \varphi_n(e^t) \to \varphi(e^t)$, et $\varphi_n(e^t) = \sum c_{k,n} \max(0, \log r_{k,n} + t)$

on applique le th de cv monotone :



$$\int \varphi(|w|)\,d\mu(w) = \int_0^\infty \varphi(S_T(x))\,dx$$
$$= \lim \int_0 \varphi_n(S_T(x))\,dx$$
$$\leq \lim \int \varphi_n(S_T(x))\,dx = \int \varphi(S_T(x))\,dx = \tau(\varphi(|T|)).$$

Corollaire : (pour $\varphi(x) = |x|^q$, $q \in]0,+\infty[$) : $\int |w|^q\,d\mu(w) \leq \|T\|_q^q$.

Rappel Prop 4 : $u(z) = \int \log\left|1 - \frac{z}{w}\right| d\mu_0(w) = \int \log|1 - zw|\,d\mu(w)$

Théorème : Si f est holomorphe dans un $V(\sigma(T)\cup\{0\})$, $f(0)=0$, alors

$$\tau\circ f(T) = \int f(w)\,d\mu(w)$$

Dém : Si $\frac{1}{z} \notin \sigma(T)$, u est ~~dérivable~~ harmonique et

$$\frac{\partial}{\partial z} \int \log|1-zw|\,d\mu(w) = \int \overbrace{|1-zw|^{-2}}^{(1-zw)(1-\bar z\bar w)} (1-\bar z\bar w)(-w)\,d\mu(w) = \int \frac{-w}{1-zw}\,d\mu(w)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} 2u(z) = \frac{\partial}{\partial z}\tau\circ\log(|1-zT|^2) = \tau\left(|1-zT|^{-2}(1-\bar z T^*)(-T)\right) = \tau\left(\frac{-T}{1-zT}\right)$$

$= \tau\left((1-zT)^{-1}T\right)$: on a l'énoncé avec $f(w) = \frac{w}{a-w}$ avec $a = \frac{1}{z} \notin \sigma(T)$.

Soit $K = \sigma(T)\cup\{0\}$: Si $f(0)=0$, $f(w) = w\tilde f(w)$, $\tilde f$ holomorphe dans $V(K)$.

Par le th de Runge, on peut approcher $\tilde f$ par des f^{ns} rationnelles à pôle hors de K.

Pour contrer, $z^n \approx \frac{cz^n}{c-z^{n+1}}$ si c est assez grand, ce qui permet d'approcher $\tilde f$ par des c.l. d'élts simples à d° nég. unif^t sur K, pôles hors de K, ce qui donne l'égalité pour f...