14/1/2014

Michaël

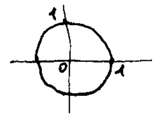
Mesure de Brown - quelques éléments circulaire

Mesure de Brown de matrices aléatoires gaussiennes.

Ref : le blog de Terence Tao, Note 8.

Cadre : M_n matrice aléatoire de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $M_{ij}^{(n)} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ i.i.d.

Def. : on appelle loi circulaire (μ_{circ}) la loi de densité $\frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2\le 1}$



Th 1 $\mu_{M_n/\sqrt{n}} \underset{\text{(conv. vague)}}{\Longrightarrow} \mu_{circ}$ p.s.

(I) Cas des matrices hermitiennes

On suppose dans cette partie que M_n est hermitien

Th 1' $\underbrace{\mu_{M_n/\sqrt{n}}}_{\mu_n} \Longrightarrow \mu_{\frac{1}{2}circ}$ p.s. où $\mu_{\frac{1}{2}circ}$ est de densité $\frac{1}{\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{[-2,2]}$.

Idée : $\mathbb{E}\int x^k d\mu_n = \frac{1}{n}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,(M_n/\sqrt{n})^k = \frac{1}{n^{1+k/2}}\sum'_{i_1,\dots,i_k} M_{i_1 i_2}\cdots M_{i_k i_1}$

On utilise alors $\mathbb{E}(M_{ij})=0$ $\mathbb{E}(M_{ij}^2)=0$ si $i\neq j$, $\mathbb{E}(|M_{ij}|^2)=1$.

puisque $M_{ij}=a_{ij}+ib_{ij}$ avec $a_{ij}, b_{ij}\sim\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$ indépendantes

et donc $\mathbb{E}(M_{ij}^2) = \mathbb{E}(a_{ij}^2)-\mathbb{E}(b_{ij}^2)+2i\,\mathbb{E}(a_{ij}b_{ij})=0$.

(II) Différence entre cas hermitien et non hermitien.

(1) Instabilité du spectre.

Cas hermitien : $\le$ de Wielandt-Hoffmann : pour A,B matrices normales, on a

$$\min_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)-\lambda_{\sigma(i)}(B)| \le \|A-B\|^2$$

Cas non hermitien : $U_0 = \begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&0&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique $\chi_0=(-X)^n$

et $U_\varepsilon = \begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&0&\ddots&1\\\varepsilon&&&0\end{pmatrix}$: polynôme caractéristique $\chi_\varepsilon = (-X)^n - \varepsilon(-1)^n$, de sorte que les valeurs propres sont les $\varepsilon^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ et $\varepsilon^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 1$: on n'a pas de résultat de régularité.

(2) méthode des moments : on avait considéré des choses du type $\int x^k d\mu_n(x)$ et conclu à la convergence vague. Mais Stone - Weierstrass permet de passer des monômes x^k à $f\in\mathcal{C}_0$ et la convergence préfaible dans le cas hermitien.

Dans le cas non hermitien : on ne peut plus conjuguer et on n'a pas de résultat de densité. On peut par exemple avoir μ mesure non triviale sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}$ $\int x^k d\mu(x)=0$: il suffit que μ soit invariante par rotation : en faisant le changement de variable $z\longrightarrow e^{2i\pi/k}z$, on obtient $\int x^k d\mu(x) = e^{2i\pi/k}\int z^k d\mu(z)$.

et donc $\int x^k d\mu(x)=0$.

Ce qui pourrait marcher serait de considérer les moments $\int z^{k} \bar{z}^{l} d\mu_n(z)$

i.e., $\frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n^*\right)^l\right)$ si la matrice est normale.

$\to$ lien avec les probabilités libres.

3) Revenons au cas général.

Considérons $\int z^k d\mu_n(z) = \Delta$: $\mathbb{E}(|\Delta|^2) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{i_1,\dots,i_k} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_k i_1}\right|^2\right)$

$$= \frac{1}{n^{2+k}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_k}} \mathbb{E}\left(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_k i_1} \overline{M_{j_1 j_2}} \cdots \overline{M_{j_k j_1}}\right)$$

pour que la contribution soit non nulle, il faut pouvoir apparier chaque $M_{i_p i_{p+1}}$ avec un $M_{j_q j_{q+1}}$. Notons $c(k)$ le nombre de tels appariements. Le choix possible des indices sur lesquels on somme étant n^k : $\mathbb{E}(|\Delta|^2) \underset{n\to\infty}{\sim}$ constante $\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$.

Montrons que la mesure limite ne charge rien hors de $D(0,1)$.

Tao dit que $\left|\left|\left|\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right|\right|\right| = 1 + o(1)$ p.s. (norme d'opérateur). Nous commençons par nous contenter de

Prop : $\left|\left|\left|\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right|\right|\right| = O(1)$ p.s.

Démonstration : Soit ξ_{ij} les entrées de M, $x \in S_n(0,1)$ sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$.

$$\mathbb{P}[|\xi_{ij} x_i| > \lambda] \leq e^{-c\lambda^2} \mathbb{E}\left(e^{c|\xi_{ij} x_i|^2}\right) \leq e^{-c\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x_i^2 c}}$$

P.ex. avec $c = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x_i^2 c}} \leq 2 = C$. D'où $\mathbb{P}[|\xi_{ij} x_i| > \lambda] \leq C e^{-\lambda^2/2}$ et

$\mathbb{E}\left[e^{c\|Mx\|^2}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{c|\xi_{ij} x_i|^2}\right) \leq C^n$. D'où $\mathbb{P}[\|Mx\| \geq A\sqrt{n}] \overset{\text{Markov}}{\leq} e^{-nA^2/2} C^n$

Pour $\varepsilon > 0$, prenons un ε-réseau Σ de $S(0,1)$: par compacité, on se donne un $\zeta \in S(0,1)$ tel que $\|M\zeta\| = \|M\|$. Donnons-nous aussi $y \in \Sigma$ tel que $\|y - \zeta\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\|My - M\zeta\| \leq |||M|||/2$ et $\|M\|/2 \leq \|My\| + |||M|||$ et $\|My\| \geq \frac{|||M|||}{2}$.

et $\mathbb{P}(|||M||| \geq A\sqrt{n}) \leq \mathbb{P}\left[\exists y \in \Sigma \ \|My\| > \frac{A\sqrt{n}}{2}\right] \leq \sum_{y \in \Sigma} \mathbb{P}\left[\|My\| > \frac{A\sqrt{n}}{2}\right]$

$$\underbrace{\leq \text{cste}\, C^n e^{-n}}_{\text{mis}=2} e^{-n\frac{A^2}{2}} \underbrace{\#\Sigma}_{\text{cste}^n}$$

$$= O(e^{-nA^2/4})$$

Donc en appliquant Borel-Cantelli, à partir d'un certain rang, $\frac{|||M|||}{\sqrt{n}} \leq A$.

Considérons $S_n(z) = \int \frac{d\mu_n(w)}{w-z}$ et $f_n(z) = \int \log|w-z|\, d\mu_n(w)$
transformée de Cauchy — potentiel logarithmique.

On a la formule $\mu_n = -\frac{1}{2\pi} \Delta f_n$ au sens des distributions.

__Prop__ : Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ $f_n(z) \longrightarrow f(z)$, où $f(z) = \int \log|w-z|\, d\mu(w)$

Alors, p.s. $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

__Dém__. Soit $A > 0$ arbitraire. Par le th. de cv. dominée $\int |f_n - f| \wedge A \longrightarrow 0$.

Donnons un compact K de $\mathbb{C}$. Alors soit K_ε un cpct de $\{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \geq \varepsilon\}$

Pour $w \in K_\varepsilon$, $\log|\cdot - w|$ est une fonction définie sur K et on a a, b réels tels que $a \leq \log|\cdot - w| \leq b$ uniformément en $w \in K_\varepsilon$. On en déduit que $\log|\cdot - w|$ est dans $L^1(K)$ unif^t en $w \in K_\varepsilon$.

L'inégalité de Jensen donne $\int_K |f_n(z)|^2\, dz \overset{\text{Jensen}}{\leq} C \int\int \log^2|z-w|\, dz\, d\mu(w) \leq \text{cste}$.

On a donc que (f_n) et f sont unif^t bornés dans $L^2(K)$.

et $\int |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \wedge A + \int |f_n - f| \mathbb{1}_{|f_n - f| \geq A} \leq \left(\int |f_n - f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}[|f_n - f| \geq A]$

"th de continuité de type Lévy pour potentiels logarithmiques"

I.n : on dit que f_n s'écrit $f_n(z) = \frac{1}{n} \sum \log\left(\frac{\lambda_i(M_n)}{\sqrt{n}} - z\right) = \frac{1}{n} \log\left|\det\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} - z\right)\right|$

Or $|\det A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda(AA^*)^{1/2}$ et $f_n(z) = \frac{1}{2} \int \log x\, d\nu_n(x)$ avec ν_n mesure spectrale de $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} - zI\right)^*\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} - zI\right)$ Ref de Tao : Girko.