Christian
28/1/2014

Le théorème de Lidskii

Soit H un e Hilbert séparable (de dim ∞)
A opérateur compact sur H et $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots$ ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité rangées par module décroissant. Cette suite peut être finie voire vide (ex. quasi-nilpotent)
On note $\mu_1(A), \mu_2(A), \dots$ ses valeurs singulières : $\mu_j(A) = \lambda_j(|A|)$.
Il existe 2 familles o-n $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de H telles que

$$A = \sum_{n\geq 1} \mu_n(A)\, \overline{\varphi_n} \otimes \psi_n \text{ : on a } A(x) = \sum_{n\geq 1} \mu_n(A) \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n .$$

On note $S_1(H)$ l'ensemble des opérateurs A tels que $\|A\|_1 = \sum \mu_n(A) < \infty$.
Soit $A \in S^1$. Pour toute base (e_n) de H, la série $\sum \langle Ae_n, e_n\rangle$ converge et sa somme ne dépend pas de la base. On pose $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle$

<u>Inégalité de Weyl</u>:

<u>Théorème</u> : $\forall\, 1 \leq p < \infty \quad \sum' |\lambda_n(A)|^p \leq \sum \mu_n(A)^p$ pour tout A compact.

<u>Lemme de trigonalisation</u> : il existe (e_m) famille o-n et $(\gamma_{m\ell})_{\ell<m}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $\forall m \quad A(e_m) = \lambda_m(A) e_m + \sum_{\ell=1}^{m-1} \gamma_{m\ell}\, e_\ell$.

<u>Dém</u> : si λ est une vp $\neq 0$ de A, $H_\lambda = \ker(A-\lambda)$ est de dimension finie et $A_{|H_\lambda}$ admet une base dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En mettant ceci bout à bout on obtient une famille libre $(f_m)_{m\geq 1}$ telle que $A(f_m) = \lambda_m f_m + \sum_{\ell<m}' \delta_{m\ell} f_\ell$. Il suffit alors d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt.

<u>Dém du théorème</u> : $\lambda_m(A) = \langle Ae_m, e_m\rangle = \sum'_{n\geq 1} \mu_n(A) \langle e_m, \varphi_n\rangle\langle \psi_n, e_m\rangle$
$= \sum'_{n\geq 1} \alpha_{mn}\, \mu_n(A)$ avec $\alpha_{mn} = \langle e_m,\varphi_n\rangle\langle\psi_n, e_m\rangle$

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \alpha_{mn} & \cdots \end{pmatrix}$ c'est la matrice d'un opérateur $\ell^1 \to \ell^1$ si et seulement si $\sup_n \sum_m |\alpha_{m,n}| < \infty$
CN : on demande seulement que l'image de chaque vecteur de la base de ℓ_1 soit dans ℓ_1.

CS : $\sum_m \left|\sum_n \alpha_{mn} \vartheta_n\right| \le \sum_n \sum_m |\alpha_{mn}||\vartheta_n| \le \sum_n \left(\sum_m |\alpha_{mn}|\right) |\vartheta_n| \le \left(\sup_n \sum_m |\alpha_{mn}|\right) \sum_n |\vartheta_n|$.

Par dualité, M est borné sur ℓ^∞ ssi $\sup_m \sum_n |\alpha_{mn}|$ est fini et c'est sa norme sur ℓ_∞.

Nos α_{mn} vérifient ces propriétés : $\sum_m |\alpha_{mn}| = \sum_m |\langle e_m, \varphi_n\rangle| |\langle \psi_n, e_m\rangle|$

$$\le \left(\sum' |\langle e_m, \varphi_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum |\langle \psi_n, e_m\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\le \|\varphi_n\| \|\psi_n\| = 1$$

De même, $\sum_n' |\alpha_{mn}| \le \|e_m\|^2 = 1$.

Par interpolation, $\|M : \ell^p \to \ell^p\| \le 1$. [on aurait pu directement utiliser l'≤ d'Hölder].

<u>Théorème de Lidskii</u> Pour tout $A \in S^1$, $\mathrm{tr}\, A = \sum' \mu_n(A)$

Intermède : <u>Produits antisymétriques</u> : Soit H Hilbert et $k \ge 0$ et $H^{\otimes k}$ sa k^e puissance tensorielle, où $H^{\otimes 0} = \mathbb{C}$.

Pour $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in H$, on pose $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \frac{1}{k!^{1/2}} \sum'_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\pi) \varphi_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\pi(k)}$

et on note $\Lambda^k(H) = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k\} \subset H \overset{2}{\otimes} \dots \overset{2}{\otimes} H$

Si (e_i) est une base hilbertienne de H, $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k\}$ est une base hilbertienne de $\Lambda^k(H)$. Si $\dim H = n$, $\dim \Lambda^k(H) = \binom{n}{k}$ si $k \le n$
$= 0$ si $k > n$

Si $A \in B(H)$, on note $A \otimes \dots \otimes A : H \overset{2}{\otimes} \dots \overset{2}{\otimes} H \circlearrowleft$ l'opérateur associé, de norme $\|A\|^k$.

On note $\Lambda^k(A) = A^{\otimes k}|_{\Lambda^k(H)} \circlearrowleft$. On a alors $\Lambda^k(A) \Lambda^k(B) = \Lambda^k(AB)$ et $|\Lambda^k(A)| = \Lambda^k(|A|)$

<u>Déterminant de $I+A$</u> : Si A est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dans une base

$$\det(I+A) = \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

et $\Lambda^k(A)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, de sorte $\sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} = \mathrm{tr}(\Lambda^k(A))$.

On a donc $\det(I+A) = \sum_{k=0}^n \mathrm{tr}(\Lambda^k(A))$.

Inspirons-nous de cette formule : Soit $A \in S^1(H)$ et, si $k \ge 0$, $|\Lambda^k(A)| = \Lambda^k(|A|)$

et les valeurs singulières de $\Lambda^k(A)$ sont $\{\mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A) : i_1 < \dots < i_k\}$.

Donc $\|\Lambda^k(A)\|_1 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A)$ et $\left(\sum_i \mu_i(A)\right)^k = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A)$

+ termes avec répétition

$$\ge k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A).$$

Donc $\Lambda^k(A) \in S^1(\Lambda^k(H))$. Posons $\boxed{\det(I+A) = \sum \mathrm{tr}(\Lambda^k(A))}$.

Proposition : Pour $A \in S^1(H)$, notons $F_A : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \det(I+zA) \end{array}$. Alors F_A est holomorphe et ① $\forall z \in \mathbb{C}$, $|F_A(z)| \leq e^{|z|\,\|A\|_1}$

② $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0\ \forall z \in \mathbb{C}\ |F_A(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$

Dem : $\Lambda^k(zA) = z^k \Lambda^k(A)$ et $F_A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{tr}(\Lambda^k(A))$: F_A est holomorphe.

De plus, $|F_A(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k |\mathrm{tr}(\Lambda^k(A))| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \|\Lambda^k(A)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k \|A\|_1^k}{k!} = e^{|z|\,\|A\|_1}$

et $|F_A(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \sum_{i_1<\dots<i_k} \mu_{i_1}(A)\cdots\mu_{i_k}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1<\dots<i_k} |z|\mu_{i_1}(A)\cdots|z|\mu_{i_k}(A)$

$= \prod_{i=1}^{\infty} (1+|z|\mu_i(A))$.

Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons N tel que $\sum_{N+1}^{\infty} \mu_i(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et $\prod_{N+1}^{\infty} (1+|z|\mu_i(A)) \leq \prod_{N+1}^{\infty} e^{|z|\mu_i(A)} = e^{\sum |z|\mu_i(A)} \leq e^{|z|\frac{\varepsilon}{2}}$ (N.B. : $1+u \leq e^u$)

et $\prod_{0}^{N} (1+|z|\mu_i(A)) \leq C_\varepsilon e^{|z|\frac{\varepsilon}{2}}$ pour C_ε approprié ...

Th : Soit $A \in S^1(H)$: alors pour $z \in \mathbb{C}$ on a $\det(I+zA) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z\lambda_n(A))$

→ Égalité entre deux f^{ons} holomorphes : la deuxième $= 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A)\right) z + o(z)$.

la première $= 1 + \mathrm{tr}(A) z + o(z)$

et le théorème de Lidskii découle ainsi de ce théorème.

On va appliquer le th. suivant d'analyse complexe : $\boxed{\text{Th de Hadamard :}}$

Soit F. $\mathbb{C}$ → holomorphe dont les zéros avec multiplicité forment une suite $(z_n)_{n \geq 1}$.

Supposons que $F(0) = 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty$, et de plus que $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0\ \forall z \in \mathbb{C}\ |F(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$.

Alors $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$. On va l'admettre. Il suffit alors de montrer que les zéros de F_A sont les $-\frac{1}{\lambda_n(A)}$.

Lemme : $\begin{array}{l} S_1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ A \longmapsto \det(I+A) \end{array}$ est continue.

Corollaire : $\forall A, B \in S^1$ $\det(I+A)\det(I+B) = \det(I+A+B+AB)$

(on considère le cas de dimension finie et on passe à la limite grâce au lemme)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- Supposons que $-\frac{1}{z}$ n'est pas v.p. de A : $1+zA$ est inversible et on pose $C = zA$, $B = -\frac{C}{1+C}$: alors $(I+C)(1+B) = I + C + B(I+C) = I + C - C = I$.

  $\rightarrow$ l'inverse de zA est $I+$ un élément de $\mathcal{S}$.

  On a donc $\det(I+zA)\det(I+B) = 1$ et $F_A(z) \neq 0$.

- Soit $z_0 = -\frac{1}{\lambda}$ avec λ valeur propre de A, et P projection spectral associé à λ :

  $(1+zAP)(1+zA(1-P)) = 1+zA$.

  Donc $F_A(z) = \underbrace{\det(I+zAP)}_{\det\left((I+zA)|_{\ker(\lambda-A)^S}\right)} \underbrace{\det(I+zA(I-P))}$ λ non vp de $A(I-P)$ et donc ceci ne s'annule pas en z_0.

  et la matrice de $A|_{\ker(\lambda-A)^S}$ est $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

  Donc $\det(1+zAP) = (1+\lambda z)^m$ avec $m = \dim E_\lambda$ et $E_\lambda = \ker A - \lambda$.

  et z_0 est zéro de F_A de multiplicité m. Donc les zéros de F_A sont les $-\frac{1}{\lambda_n(A)}$.