Christian

7 2 2014

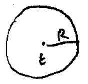
N.B. : Si $T \in B(H)$ est compact et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe N à partir duquel $\ker(\lambda - T)^n$ est constant.
On a $N_\lambda = \ker(\lambda - T)^N$ de dim finie et la multiplicité de λ est la dimension de N_λ.

Continuité de $\det(1+\cdot)$: $\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \det(I+A) \end{array}$ est continue

Soient $A, B \in S^1$: soit $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \det\left(I + \frac{1}{2}(A+B) + z(A-B)\right) \end{array}$. G est holomorphe

et $G(\frac{1}{2}) = \det(I+A)$
$G(-\frac{1}{2}) = \det(I+B)$ et $|\det(I+A) - \det(I+B)| \leq \sup\{|G'(t)| : -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\}$

et $G'(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{t,R}} \frac{G(z)}{(z-t)^2}\,dz$: $|G'(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_{t,R}} \frac{|G(z)|}{R^2}\,|dz| \leq$



$\leq \frac{1}{R} \sup\{|G(z)| : |z-t| = R\}$.

Supposons $A \neq B$ et prenons $R = \frac{1}{\|A-B\|_1}$

On a $|G(z)| = |\det(\sim)| \leq e^{\|\frac{1}{2}(A+B) + z(A-B)\|_1} \leq e^{\|\frac{1+t}{2}A + \frac{1-t}{2}B\| + \underbrace{|z-t|\,\|A-B\|_1}_{1}}$

$\leq e^{1 + \frac{1+t}{2}\|A\|_1 + \frac{1-t}{2}\|A\|_1}$

$\leq e^{1 + \|A\|_1 + \|B\|_1}$

On a vu dans l'exposé de Yulia que :
(M, τ) avN semifinie, $A \in M \cap L^1(M,\tau)$, càd $A \in M$ et $\tau(|A|) < \infty$.

À $T = I + A$ on associe $\tau \log|T| \in [-\infty, +\infty[$.

$\llcorner$ si $\ker T \neq 0$, on pose $= -\infty$
si $\ker T = 0$, pb déf^s ad hoc, par $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \tau \log|T| + \varepsilon$

Le déterminant de Fuglede-Kadison est défini par $\Delta(T) = e^{\tau \log|T|}$: $\Delta(T) \geq 0$

Si $M = M_n(\mathbb{C})$ avec $\tau = \mathrm{tr}$, $\Delta(T) = |\det T|$.

<u>Th de Brown 1</u> : Il existe une unique mesure ≥ 0 sur $\sigma(A)$ telque
$\mu_A(\{0\}) = 0$ (lorsque $0 \in \sigma(A)$) et pour tout $z \in \mathbb{C}$ (i) $\omega \in \log_+|1 - z\omega| \in L^1(\mu_A)$
(ii) $\log \Delta(I - zA) = \int_{\sigma(A)} \log|1 - z\omega|\,d\mu_A(\omega)$
$\in [-\infty, +\infty[$

Tout ceci est basé sur le fait que $z \mapsto \log \Delta(I - zA)$ est sous-harmonique.

Th de Brown 2 : Soit $A \in M \cap L^1(M,\tau)$: alors

(i) $\forall p \geq 1$ $\int_{\sigma(A)} |\omega|^p \, d\mu_A(\omega) \leq \|A\|_p^p < \infty$

(ii) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec Ω ouvert contenant $\sigma(A) \cup \{0\}$ telle que $f(0)=0$. Alors $f|_{\sigma(A)}$ est μ_A-intégrable, $f(A) \in L^1(M,\tau)$, $\tau \circ f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\omega) \, d\mu_A(\omega)$

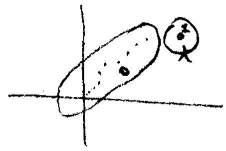
On a $M \cap L^1(M,\tau) \subset L^p(M,\tau)$ et $\|A\|_p^p = \tau(|A|^p) < \infty$

Mesure de Brown d'un opérateur compact.

- (M,τ), $A \in M \cap L^1(\tau)$, $M \subset B(H)$, H de dimension infinie
- On suppose que A est compact : cela dépend de la représentation !

$M_n \hookrightarrow M_n \otimes B(\ell^2)$ "Il faut prendre H le plus petit possible"
$a \longmapsto a \otimes I$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ valeur propre de A et P_λ le projecteur spectral associé :
$P_\lambda = f_\lambda(A)$, où $f_\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur un voisinage de $\sigma(A)$.
$f_\lambda(\lambda) = 1$ et $f_\lambda(\omega) = 0$ pour $\omega \in \sigma(A) \setminus \{\lambda\}$.



Alors f_λ vérifie le Th de Brown 2 : $\tau(P_\lambda) = \mu_A(\{\lambda\})$
et cette relation détermine μ_A

Cas de $M = B(H)$, $\tau = tr$

$tr\, P_\lambda = rang(P_\lambda)$ et $Im\, P_\lambda = N_\lambda$. Donc $tr\, P_\lambda$ = multiplicité de λ et $\mu_A = \sum_{n \geq 1} \delta_{\lambda_n(A)}$

Dans ce cas, (i) $\equiv$ inégalité de Weyl.
(ii) avec $f(\omega) = \omega$ est le théorème de Lidskii.

Lien entre déterminant Δ et $\det(I+A)$:

Proposition. Soit $A \in S^1(H)$. Alors $\Delta(I+A) = |\det(I+A)|$

Explication : Supposons $I+A$ inversible. Soit A_n suite d'op^s de rang fini telle que $\|A_n - A\|_1 \longrightarrow 0$. Alors $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$ et $I+A_n$ est inversible à partir d'un certain rang. Donc on peut supposer $I+A_n$ inversible, et alors $\Delta(I+A) = \lim \Delta(I+A_n)$.
Aussi $\det(I+A) = \lim \det(I+A_n)$. Cela marche du moins en dim finie et donc en général.

Rappel : $\det(I+zA) = \prod_{i=1}^{\infty} (1+\lambda_n(A)z)$ et les zéros sont les $-\frac{1}{\lambda_n(A)}$.

Supposons $I+A$ non inversible.

Alors $\det(I+A)=0$. A-t-on $\Delta(I+A)=0$? ($\tau(\log|I+A|)=-\infty$? $\log|I+A|$ ... ?)

En fait on a affaire à un opérateur compact et cela n'a lieu que si $I+A$ est non injectif.

<u>Th</u> Haagerup-Schultz

Supposons $\tau(1)=1$: alors $M\cap L^1=M$. Pour $A\in M$ considérons la mesure de Brown μ_A. Alors $\mu_A(\sigma(A))\leq 1$ $\left[\int|\omega|^p d\mu_A(\omega)\leq\|A\|_p^p=\tau(|A|^p)_{\text{pour } p=0}\right]$

Définissons $\nu_A=\mu_A+(1-\mu_A(\sigma(A)))\,\delta_0$

Supposons que M est un facteur de type II_1. Soit $A\in M$.

Pour tout borélien $\Sigma\subset\mathbb{C}$, il existe une unique projection$^{\perp}$ $p_\Sigma\in M$ telle que

(i) $\tau(p_\Sigma)=\nu_A(\Sigma)$ [c-à-d que si A n'est pas compact, on peut faire un découpage !]

(ii) $p_\Sigma(H)$ est stable par A et A induit $A_\Sigma: p_\Sigma(H)\longrightarrow p_\Sigma(H)$

(iii) La mesure de Brown de A_Σ $(\in p_\Sigma M p_\Sigma)$ est à support dans Σ.

(iv) La mesure de Brown de $(1-p_\Sigma)A(1-p_\Sigma)$ $(\in(1-p_\Sigma)M(1-p_\Sigma))$ est à support dans $\complement\Sigma$

De plus, $p_\Sigma H$ est hyperinvariant : si S commute à A, $p_\Sigma(H)$ est stable par S.

La <u>démonstration</u> repose sur : • $\displaystyle\int|\omega|^p d\nu_A(\omega)=\inf_{\substack{S\in M\\ S\text{ inversible}}}\|S^{-1}AS\|_p^p$

• Mesures de Brown des opérateurs R-diagonaux (liée aux probas libres)

Puis Dykema-Sukochev-Zanin l'ont appliqué à la décomposition "nilpotent + normal" dans les facteurs II_1.