Alexandre

14 2 14

Mesure de Brown

Corollaire B : $\forall T\in M\ \forall p>0 \quad \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T(\lambda) = \inf_{A\in M_{inv.}} \|ATA^{-1}\|_p^p$ ⟵ éléments inversibles de M.

Th A : $\forall T\in M\ \exists (A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans M_{inv} (i) $\|A_kTA_k^{-1}\|\leq\|T\|$ pour $k\geq 1$

(ii) $A_kTA_k^{-1} \xrightarrow{\ast\text{-distrib.}} N\in M^{\mathcal{U}}$, où $M^{\mathcal{U}}$ est une ultrapuissance de M et $\mu_N=\mu_T$ et N est normal.

1ère étape : on va construire $A:\mathbb{R}^+\xrightarrow{C^1} M_{inv}$ telle que $X(t)=A(t)TA(t)^{-1}$ décroît en norme $\|\ \|_{2p}$ pour tout entier $p\geq 1$.

Idée : $\Phi : M_{inv} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $A \longmapsto \|ATA^{-1}\|_2^2$ et construire une trajectoire $t\mapsto A(t)$ qui se dirige vers un "minimum local" de Φ par une méthode de gradient.

On résout l'équadiff $\begin{cases} A'(t)=-\nabla\Phi(A(t))\\ A(0)=1\end{cases}$. On a $d\Phi(A)(H)=2\,\mathrm{Re}\,\tau(A^{-1}[X,X^*]H)$ où $X=ATA^{-1}$.

On voudrait donc poser $\nabla\Phi(A)=[X^*,X^*]A^{-1*}$. Mais on aura un pb pour montrer que les solutions locales sont globales. On va donc plutôt poser $\nabla\Phi(A)=[X^*,X]A$.

Si $A:\mathbb{R}^+\xrightarrow{C^1} M_{inv}$ et $X=ATA^{-1}$, $\frac{dX}{dt}=A'TA^{-1}-ATA^{-1}A'A^{-1}$
$=A'A^{-1}X-XA'A^{-1}$
$=[A'A^{-1},X]$

et $\begin{cases}A'(t)=-[X^*,X]A(t)\\ A(0)=1\end{cases}$ est l'équadiff à résoudre.

Alors $\frac{d\|X(t)\|_2^2}{dt}=2\,\mathrm{Re}\,\tau\big(A(t)^{-1}[X,X^*]A'(t)\big) \lesseqgtr 0$.

Pour que ce soit ≤ 0, il suffit que $[X,X^*]=-A'A^{-1}$ (car $[X,X^*]$ est autoadjoint !)

Dans un premier temps, on résout (P) $\begin{cases}X'=[[X^*,X],X]\\ X(0)=T\end{cases}$. Par Cauchy-Lipschitz, (P) admet une solution ~~globale~~ maximale, dont on voudra montrer qu'elle est globale, de sorte que X est définie sur $\mathbb{R}^+$. Puis seulement résoudra-t-on (P').

Fait 1 : $f:\mathbb{R}^+\times E\longrightarrow E$, $(t,x)\longmapsto x$, E Banach et i) continue, loc^t Lipschitz / 2^e variable ii) f est bornée sur les bornés.

Si $x(t)$ est une sol. max. de $\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t))\\ x(0)=x_0\end{cases}$ et que x est bornée, alors x est globale.

Preuve : exo, cf. théorème des bouts.

On va m.q. $\|X(t)\|_\infty$ décroit. $\frac{d}{dt}\|X(t)\|_{2p}^{2p}$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{d}{dt}\tau\left((X^*X)^p\right) = p\,\tau\left(\frac{d}{dt}(X^*X)(X^*X)^{p-1}\right)$$
$$= p\,\tau\left(\left([X^*,[X^*,X]]X + X^*[[X^*,X],X]\right)(X^*X)^{p-1}\right)$$

et
$$[X^*,[X^*,X]]X + X^*[[X^*,X],X] = (\cancel{X^{*2}X} - X^*XX^*)X + X^*(X^*X^2 - XX^*X)$$
$$- [X^*,X]X^*X - X^*X[X^*,X]$$
$$= 2X^*[X^*,X]X - [X^*,X]X^*X - X^*X[X^*,X].$$

et $\frac{d\tau}{dt}\left((X^*X)^p\right) = 2\tau\left([X^*,X]\left[(XX^*)^p - (X^*X)^p\right]\right)$

<u>Fait</u> : Si $a,b\in(M,\tau)$ et a,b sont normaux, alors $\exists!$ mesure de proba $\mu_{a,b}$ sur $\sigma(a)\times\sigma(b)$ telle que $\forall f\in C(\sigma(a))$ $\forall g\in C(\sigma(b))$

$$\tau\left(f(a)g(b)\right) = \int_{\sigma(a)\times\sigma(b)} f(u)g(v)\,\mu_{a,b}(u,v)$$

Cf. exposé de Christian. • a donne lieu à $L: C^*\langle a\rangle \to B(L^2(M,\tau))$ op de multiplication à gauche
• b donne lieu à $R: C^*\langle b\rangle^{op} \to B(L^2(M,\tau))$

L et R sont des $*$-représentations qui commutent, que l'on peut étendre à
$\langle a\rangle \otimes_{max} \langle b\rangle^{op} \to B(L^2(M,\tau))$. Or $\langle a\rangle$ est commutative donc nucléaire
$\sum a_i\otimes b_i \longmapsto \sum L_{a_i}R_{b_i}$ et $\langle a\rangle \otimes_{max} \langle b\rangle^{op} = \langle a\rangle \otimes_{min} \langle b\rangle^{op}$
$= \mathcal{C}(\sigma(a)\times\sigma(b))$.

et $\langle 1_{\tau},1\rangle\circ\pi$ donne f.l. ≥ 0 sur $C(\sigma(a)\times\sigma(b))$ et on l'identifie !

Et $\frac{d}{dt}\|X(t)\|_{2p}^{2p} = 2p\,\tau\left((X^*X - XX^*)\left((XX^*)^p - (X^*X)^p\right)\right)$

et $\frac{d}{dt}\|X(t)\|_{2p}^{2p} = 2p\int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{(u-v)(v^p-u^p)}_{\leq 0}\,d\mu_t(u,v) \leq 0$.

Donc $\|X(t)\|_{2p}^{2p}\downarrow$ et $\|X(t)\|_\infty\downarrow$ et $\|X\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|X\|_p$.

Donc $\{X(t), t\in\mathbb{R}^+\}$ est borné dans M et X est une solution globale !

Considérons maintenant $(\mathcal{P}')$ $\begin{cases} A' = [X^*,X]A \\ A(0)=1 \end{cases}$

<u>Fait 2</u> : Si $f: \mathbb{R}_+\times E \to E$ Banach est continue et <u>global^t</u> Lipschitz / 2^e variable, alors les solutions maximales sont globales.

Ex. : $|\tau(X^{*2}X^2) - \tau((X^*X)^2)| = |\tau(X^*[X^*,X]X)| \leq$ [C-S]

$$\leq \|[X^*,X]\|_2 \underbrace{\|X^*X\|_2}_{\leq \|T\|_\infty^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

et donc $\tau(X^{*2}X^2)$ admet une limite.

Il reste à prouver la convergence des $\tau((X^*)^m X^n)$.

On sait que $\tau((X^*-\bar\lambda)^n(X-\lambda)^n)$ admet aussi une limite pour $t\to\infty$.

puisque $X-\lambda$ a la même propriété que X et vérifie la même é.d. avec $X(0)=1-\lambda$

Faisons une récurrence sur $\max(m,n)=n$:

- $n=1$: $\tau((X^*-\bar\lambda)(X-\lambda)) = \tau(X^*X - \bar\lambda X - \lambda X^* + |\lambda|^2)$ et $\bar\lambda\tau(X)$ a une limite et avec $\lambda=1$ et $\lambda=i$ ... $\tau(X)$ converge ... etc...

Dernier fait n°4 : Ce qui est borné, on peut le faire converger dans une ultrapuissance : Notons $(M_t,\tau_t)=(M,\tau)$ et $B=\{(x_t)_{t\in\mathbb{R}^+}\in M^{\mathbb{R}_+} : \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|x_t\|_\infty<\infty\}$

et on prend un ultrafiltre sur $\mathbb{R}_+$ plus fin que le filtre des voisinages de $+\infty$.

Introduisons $\varphi_\mathcal{U}((x_t)) = \lim_\mathcal{U} \tau_t(x_t)$: $\varphi_\mathcal{U}$ est un état tracial sur B.

On considère la représentation GNS de B pour $\varphi_\mathcal{U}$: $I_\mathcal{U}=\{(x_t)_{t\in\mathbb{R}} : \varphi_\mathcal{U}(x_t^*x_t)=0\}$ idéal bilatère fermé de B.

Puis $H_\mathcal{U} = B/I_\mathcal{U}$ qu'on complète pour le produit scalaire $\varphi_\mathcal{U}(\cdot^*\cdot)$

On obtient $L : B \to B(H_\mathcal{U})$ et $\ker L = I_\mathcal{U}$

$$(x_t) \mapsto L_x : H_\mathcal{U} \to H_\mathcal{U}$$
$$y_t \mapsto (\overline{x_t y_t})$$

De plus, McDuff a prouvé que $L_\mathcal{U} : B/I_\mathcal{U} \to B(H_\mathcal{U})$ a comme image une algèbre de von Neumann : $L_\mathcal{U}(B/I_\mathcal{U})$ est l'ultrapuissance de M notée $M^\mathcal{U}$. On note $\tau_\mathcal{U}$ la trace qu'on obtient : elle est normale et fidèle.