Alexandre

1

21 2 14

Fin de la démonstration du Théorème A.

Nous avions montré comment construire $t \longmapsto X(t) = A(t)TA(t)^{-1}$ avec $\|X(t)\| \leq \|T\|$ pour $t \geq 0$ et $X(t)$ converge en $*$-distribution vers $N \in M^{\mathcal{U}}$ lorsque $t \to \infty$. On a $\lim_{t\to\infty} \|[X(t)^*, X(t)]\|_2 = 0$.

Il reste à m.q. $\mu_T = \mu_N$. Il suffit de mq $\Delta(T-\lambda) = \Delta(N-\lambda)$

Pour $\lambda = 0$, regardons $\log \Delta(T) = \tau \circ \log |T| = \inf_{\varepsilon > 0} \frac{1}{2} \tau(\log |T|^2 + \varepsilon)$

et $\Delta(T) = \Delta(A(t)TA(t)^{-1})$ pour $t \geq 0$ et $\log \Delta(T) = \inf_{t\geq 0} \inf_{\varepsilon > 0} \frac{1}{2} \tau(\log |X(t)|^2 + \varepsilon)$

$= \inf_{\varepsilon > 0} \inf_{t \geq 0} \sim$

Or $X(t)$ converge en $*$-distribution vers N : en particulier, $X^*(t)X(t)$ converge en moments vers N^*N. Or $\|X(t)^* X(t)\| \leq \|T\|^2$.

Par Weierstrass, $\tau \circ f(X(t)^* X(t)) \longrightarrow \tau \circ f(N^*N)$, d'où $\tau \circ \log(|X(t)|^2 + \varepsilon) \xrightarrow[t\to\infty]{} \tau \circ \log(N^*N + \varepsilon)$.

Il reste juste à prouver que $t \longmapsto \tau \circ \log(|X(t)|^2 + \varepsilon)$ est décroissante.

Or nous avions vu que $\frac{d}{dt} \tau[(X(t)^* X(t))^p] = 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} (u-v)(pv^p - pu^p)\, d\mu_t(u,v)$

On l'étend à $\phi \in C^1(\mathbb{R}^+)$: on a $\frac{d}{dt} \tau(\phi(X^*X)) = 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} v\phi'(v) - u\phi'(u)\, d\mu_t(u,v)$

par Weierstrass en approximant uniformément ϕ' par P'_n.

Avec $\phi = \log(\cdot + \varepsilon)$, on a $\frac{d}{dt} \tau \circ \log(|X(t)|^2 + \varepsilon) = -2 \int_{\mathbb{R}_+^2} (u-v)\left(\frac{u}{u+\varepsilon} - \frac{v}{v+\varepsilon}\right) d\mu_t(u,v) \leq 0$

<u>Preuve du corollaire B</u> pour $p > 0$: si $A \in M_{inv}$, $\mu_{ATA^{-1}} = \mu_T$, d'où $\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_{ATA^{-1}} = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T \leq \|ATA^{-1}\|_p^p$

$\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T \leq \inf_{A \in M_{inv}} \|ATA^{-1}\|_p^p$.

Soit (A_k) comme dans le Théorème A : $\|A_k T A_k^{-1}\|_p = \tau\Big(\big[\underbrace{(A_kTA_k^{-1})^*(A_kTA_k^{-1})}_{H_k}\big]^{p/2}\Big)$

H_k converge en $*$-distribution vers N^*N. Comme $\|H_k\| \leq \|T\|^2$ uniformément, le th Weierstrass montre que si $f \in C(\mathbb{R}_+)$, $\tau \circ f(H_k) \to \tau \circ f(N^*N)$, d'où $\|A_kTA_k^{-1}\|_p^p \xrightarrow[k\to\infty]{} \|N\|_p^p$

Or N est normal : $\mu_N = \tau \circ E_N$, où E_N est la résolution spectrale de N.

Or $\|N\|_p^p = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_N(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T(\lambda)$.

<u>Th</u> : Soit $T \in M$ et $p > 0$. Alors $\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{\frac{p}{n}}^{\frac{p}{n}}$

<u>Fait</u> : Si (M, τ) est une a.v.N avec $\tau(1) = 1$, si $T \in M$ et f holomorphe sur un voisinage de $\sigma(T)$, alors la mesure de Brown de $f(T)$ est la même image de μ_T par f.

$\to$ cf. article de Brown. ou th 2 de Charlion.

<u>Preuve du Th</u> : $(\leq)$ $\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} |\lambda^n|^{\frac{p}{n}} d\mu_T(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^{\frac{p}{n}} d\mu_{T^n}(\lambda) \underset{\text{Weyl}}{\leq} \|T^n\|^{\frac{p}{n}}_{\frac{p}{n}}$

$(\geq)$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in M_{inv}$ tel que $\|\underbrace{ATA^{-1}}_{S}\|_p^p \leq \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T + \varepsilon$.

On a $T = A^{-1}SA$ et $T^n = A^{-1}S^nA$ et $\|T^n\|_{\frac{p}{n}} = \|A^{-1}S^nA\|_{\frac{p}{n}}$

Prenons l'$\leq$ de Hölder avec $\frac{1}{\frac{p}{n}} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{+\infty}$: $\|T^n\|_{\frac{p}{n}} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\|S\|_p^n$

$$\|T^n\|^{\frac{p}{n}}_{\frac{p}{n}} \leq (\|A^{-1}\|\|A\|)^{\frac{p}{n}} \|S\|_p^p \leq \text{———} \left(\int_{\mathbb{C}} + \varepsilon\right)$$

et $\lim \|T^n\|^{\frac{p}{n}}_{\frac{p}{n}} \leq \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\mu_T(\lambda) + \varepsilon$

<u>Théorème</u> : Si $T \in M$, on note ν_n la mesure de Brown de $[(T^n)^*(T^n)]^{\frac{1}{n}}$ et ν la mesure image de μ_T par $z \longmapsto |z|^2$. Alors $\nu_n \longrightarrow \nu$ étroitement, i.e., $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ $\int f d\nu_n \to \int f d\nu$

<u>Dem</u> : Par Weierstrass, il suffit de vérifier la convergence en moments de ν_n vers ν.

On a $\int t^p d\nu_n = \tau\left((T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}}\right) = \|T^n\|^{\frac{2p}{n}}_{\frac{2p}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^{2p} d\mu_T(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^p d\nu(\lambda)$.

<u>Corollaire</u> : Si $T \in M$, $\mu_T = \delta_0$ ssi $(T^{n*}T^n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour la topologie forte d'opérateurs $M \subseteq B(L^2(M,\tau))$

<u>Dem</u> : $(\Rightarrow)$ On a $\|[(T^n)^*(T^n)]^{\frac{1}{n}}\| \leq \|T\|^2$; M est dense dans $L^2(M,\tau)$

Il suffit de m.q. $\forall \xi \in M$ $[(T^n)^*(T^n)]^{\frac{1}{n}} \xi \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Or $\| \quad \|_2^2 = \tau\left[(T^{n*}T^n)^{\frac{2}{n}} \xi\xi^*\right]$

$$\leq \|[(T^n)^*T^n]^{\frac{2}{n}}\|_2 \|\xi\xi^*\|_2.$$

et $\tau\left((T^{n*}T^n)^{\frac{4}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} t^4 d\nu_n(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ (on aurait mieux fait de faire $\|\ \|_1 \|\ \|_\infty$)

Or $\nu_n \longrightarrow \nu$ étroitement et $\mu_T = \delta_0$; donc $\nu = \delta_0$. Donc $\left(\int t^4 d\nu_n(t)\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$(\Leftarrow)$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La suite est bornée et donc $(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour la topologie forte d'opérateurs.

I.e., $\underbrace{\tau\left((T^{n*}T^n)^{\frac{2p}{n}}\right)}_{\int_{\mathbb{R}^+} t^{2p} d\nu_n(t)} \longrightarrow 0$. Par Weierstrass, $\int_{\mathbb{R}^+} f(t) d\nu_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$, d'où $\nu = \delta_0 = \mu_T$