Christian
7/3/2014

Haagerup-Schultz. s-e invariants

. $T\in B(H)$

. $K\subset H$ s.e. fermé est T-invariant si $T(K)\subset K$.

. si p est la projection (orthogonale) sur K, $pTp=Tp$.

N.B.: K et $K^\perp$ sont T-invariants ssi $pT=Tp$.

. K est T-hyperinvariant lorsque $\forall S\in\{T\}'$ K est S-invariant.

Th (Lomonosov 1973) Si $T\neq 0$ compact, alors T admet un se $K\subset H$ non trivial (i.e., $K\neq\{0\}$, $K\neq H$) qui est hyperinvariant.

La q pour un T général est un des pb ouverts les plus fameux.

s-e invariants ds les algèbres de von Neumann:

Soit M une a.vN. Le pb du se invariant sur M est: Etant donné $T\in M$, existe-t-il p projection non triviale ($p\in M$, $p\neq 0,1$) telle que $pTp=Tp$?

Lemme: Soit $M\subset B(H)$ (i.e., il y a une rep. fidèle w^*-continue de M dans $B(H)$), soit $T\in M$, soit $K\subset H$ T-hyperinvariant. Soit p projection orthogonale sur K. Alors $p\in vN(T)$.

Dem: Soit $S\in\{T,T^*\}'\subset B(H)$. Alors S,S^* commutent avec T et K est $\begin{cases} S\text{-invariant} \\ S^*\text{-invariant}\end{cases}$ $\{T\}''$

Donc K et $K^\perp$ sont S-invariants et $pS=Sp$. Donc $p\in\{T,T^*\}''=vN(T)$ (th du bicommutant).

⚠ La réciproque est fausse !

Proposition: Supposons $M\subset B(H)$ et soit $\pi: M\to B(\mathcal{H})$ une $*$-rep unitale w^*-continue et injective. Soit $p\in M$ projection. Soit $T\in M$. Alors $p(H)$ est T-hyperinvariant ssi $(\pi(p))(\mathcal{H})$ est $\pi(T)$-hyperinvariant.

Dém: (Dykema 2005). Idée: un tel π est extrêmement rigide: il existe K Hilbert et $e\in B(H\bar{\otimes}K)$ projection qui commute avec $M\otimes I_K$ et $U:\mathcal{H}\to E=e(H\bar{\otimes}K)$ unitaire tel que $\forall x\in M$ $\pi(x)=U^*(\underbrace{(x\otimes I_K)}_{\text{ampliation}}\overset{\text{restriction}}{|_E})U$

Soit $H_0=p(H)$ supposé T-hyperinvariant. Montrons que $H_0\bar{\otimes}K$ est $(T\otimes I_K)$-hyperinvariant.

Pour $k\in K$, on note $V_k: H\to H\bar{\otimes}K$, $h\mapsto h\otimes k$. pour $B\in B(H)$, $V_kB=(B\otimes I)V_k$

Soit $R \in \{T \otimes I_K\}'$: pour $k_0, k_1 \in K$, $V_{k_1}^* R V_{k_0} T = V_{k_1}^* R (T \otimes I) V_{k_0} = V_{k_1}^* (T \otimes I) R V_{k_0}$
$= T \underbrace{V_{k_1}^* R V_{k_0}}_{\in \{T\}'}$.

Donc H_0 est $V_{k_1}^* R V_{k_0}$-invariant.

Soient $h_0 \in H_0$ et $h_1 \in H_0^\perp$. On veut mq $\langle R(h_0 \otimes k_0), h_1 \otimes k_1 \rangle = 0$. Or ceci

$= \langle R V_{k_0}(h_0), V_{k_1}(h_1) \rangle = \langle \underbrace{V_{k_1}^* R V_{k_0}(h_0)}_{\in H_0}, \underset{H_0^\perp}{\underset{\cap}{h_1}} \rangle$. Donc $R(h_0 \otimes k_0) \in H_0 \bar{\otimes} K$ et $H_0 \bar{\otimes} K$ est R-hyperinvariant.

Comme e commute avec $M \otimes I$, on déduit que $E \cap H_0 \bar{\otimes} K$ est $(T \otimes I_K)|_E$-hyperinvariant.
Pour terminer : $U^*(E \cap H_0 \bar{\otimes} K)$ est $U^*((T \otimes I_K)|_E) U$-hyperinvariant
$[\pi''(p)](\mathcal{H})$.

<u>Le pb du sev hyperinvariant pour M</u> devient donc :
Etant donné $T \in M \setminus \langle 1 \rangle$ et $M \subset B(H)$, existe-t-il $H_0 \subset H$ T-hyperinvariant n.t.
N.B. : Si $M \cap M' \neq \langle I \rangle$ et que donc $\exists p \in M \cap M'$ projection non triviale, alors
$\forall T \in M \quad pT = Tp$, de sorte que le pb du sev invariant est résolu positivement sur M
Haagerup dit idem pour le pb du sev hyperinvariant (argument ?)

<u>Les espaces $E(T,r)$ et $F(T,r)$</u> : Soit H e.H., $T \in B(H)$, $r > 0$.
<u>Déf</u> : $E = E(T,r) = \{\xi \in H : \exists (\xi_n)$ suite dans H avec $\xi_n \to \xi$ et $\overline{\lim} \|T^n \xi_n\|^{1/n} \leq r\}$
$F(T,r) = \{\eta$ $\qquad (\eta_n)$ $\qquad T^{-n}\eta_n \to \eta$ et $\overline{\lim} \|\eta_n\|^{1/n} \leq r\}$
$= "E(T^{-1}, r^{-1})"$

<u>Proposition 1.</u> (1) $E(T,r)$ et $F(T,r)$ sont des sev fermés de H
(2) ———————————— T-hyperinvariants.

<u>Dém</u> : ① sev $\xi, \xi' \in E(T,r)$, $\xi_n \to \xi$, $\xi'_n \to \xi'$. $\xi_n + \xi'_n \to \xi + \xi'$ et
$\|T^n(\xi_n + \xi'_n)\| \leq \|T^n \xi_n\| + \|T^n \xi'_n\| \leq 2 \max(,)$
$(\qquad)^{1/n} \leq 2^{1/n} \max(\quad ^{1/n}, \quad ^{1/n})$ et $\overline{\lim} \leq r$.
<u>fermé</u> : Soit $(\xi^k)_{k \geq 1}$ suite de $E(T,r)$ de limite $\xi \in H$. Pour $k \geq 1$ soit (ξ_n^k) suite de limite ξ^k telle que $\overline{\lim} \|T^n \xi_n^k\|^{1/n} \leq r$. Il existe (n_k) suite st^t ↑ tq
$\forall n \geq n_k \quad \|\xi_n^k - \xi^k\| \leq \frac{1}{k}$, $\|T^n \xi_n^k\|^{1/n} \leq r + \frac{1}{k}$. On définit (ξ_n) en posant $\xi_n = \xi_n^k$ lorsque $n_k \leq n < n_{k+1}$.
Alors pour un tel n (et tout k) : $\|\xi_n - \xi^k\| \leq \|\xi_n - \xi_n^k\| + \frac{1}{k}$ et $\|T^n \xi_n\|^{1/n} \leq r + \frac{1}{k}$.

(2) Soit $S \in \{T\}'$ et $\xi \in E(T,r)$ et soit le (ξ_n) associé.

Alors $S\xi_n \to S\xi$ et $\|T^n S\xi_n\|^{1/n} \le \|ST^n\xi_n\|^{1/n} \le \underbrace{\|S\|^{1/n}}_{\to 1} \|T^n\xi_n\|^{1/n}$

Donc $\overline{\lim}\, \|T^n S\xi_n\|^{1/n} \le r$ et $S(\xi) \in E(T,r)$.

<u>Proposition 2</u> : (1) $r \mapsto E(T,r)$ est $\uparrow$ et $E(T,r) = \bigcap_{s>r} E(T,s)$

(2) $r \mapsto F(T,r)$ est $\downarrow$ et $F(T,r) = \bigcap_{0<s<r} F(T,s)$

Dem du (1) : $\supset$? Soit $\xi \in \bigcap$: si $k \ge 1$, $\xi \in E(T, r+\frac{1}{k})$: on a donc des suites $(\xi_n^k)_n$ de limite ξ telles que $\overline{\lim}\, \|T^n \xi_n^k\|^{\frac{1}{n}} \le r + \frac{1}{k}$. On peut donc choisir des $n_k \uparrow$ tels que si $n \ge n_k$ $\|\xi_n^k - \xi\| \le \frac{1}{k}$ et $\|T^n \xi_n^k\|^{\frac{1}{n}} \le r + \frac{2}{k}$. On construit ξ_n comme dans la proposition 1 et alors $\xi_n \to \xi$ et $\overline{\lim}\, \|T^n \xi_n\|^{\frac{1}{n}} \le r$.

<u>Proposition 3</u> : si $0 < r < s$, $E(T,r) \perp F(T^*,s)$.

<u>Dem</u> : Soient $\xi \in E(T,r)$ et $\eta \in F(T^*,s)$, puis $\xi_n \to \xi$ avec $\overline{\lim}\, \|T^n \xi_n\|^{\frac{1}{n}} \le r$, $\eta_n \to \eta$ avec $\overline{\lim}\, \|\eta_n\|^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{s}$

Soit N tel que $\forall n \ge N$ $\|T^n \xi_n\| \le r'^n$ et $\|\eta_n\| \le \frac{1}{s'^n}$.

Alors $|\langle T^n \xi_n, \eta_n \rangle| \le \left(\frac{r'}{s'}\right)^n \longrightarrow 0$. Donc $\underbrace{\langle \xi_n, T^{*n} \eta_n \rangle}_{\langle \xi, \eta \rangle} \to 0$

<u>Retour aux questions d'indépendance d'avN</u> / B(H)

Soit $M \subset B(H)$ avN, $T \in M$, $r > 0$, $\pi : M \to B(\mathcal{H})$ $*$-rep unitale w^*-continue.

(1) Soit $p \in M$ projection sur $E(T,r) \subset H$. Alors $\pi(p)$ est <u>la</u> projection sur $E(\pi(T), r) \subset \mathcal{H}$.

(2) Soit $q \in M$ projection sur $F(T,r) \subset H$. Alors $\pi(q)$ est la projection sur $F(\pi(T), r) \subset \mathcal{H}$.

Idée : on part de la structure de π. Ampliation, restriction.

$\to$ cf. Dykema, Haagerup.