

Sous-espaces invariants
élém. circulaires $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ -diagonaux $\leadsto \dots$
Spielker, Schneider

Th M -facteur $\mathbb{I}_1$, $P \in M$, $M \subset N = M * L(\mathbb{F}_4)$
(facteur $\mathbb{I}_1$)
 τ -trace fidèle normale sur N :

$\{x, y\}$ -système circulaire
qui engendre $L(\mathbb{F}_4)$ et est libre de M

Alors $z = xy^{-1} \in L^p(N, \tau)$, $P + az \in L^p(M, \tau)$

$\forall 0 < p < 1$, $\forall 0 < a < +\infty$.

$\Delta(P + az)$ est donc bien défini pour $\forall a > 0$ et
 $\Delta(P + az) = \Delta(P^*P + a^2 \mathbb{1})^{\frac{1}{2}}$.

Def Système semi-circulaire : $\{s_1, \dots, s_n\} \in (N, \tau)$

$$s_k \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{4-x^2} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x) dx$$

$$s_k^* = s_k \quad \tau(f(s_k)) = \int_{-2}^2 f(x) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{4-x^2} dx$$

Système circulaire : $c_1, \dots, c_n$ & $\exists s_1, \dots, s_n$ tq

$$c_k = (s_{2k-1} + i s_{2k}) : \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(F4) Voiculescu : $\{x, y\}$ circulaire $\Rightarrow \{x, y\}'' \simeq L(\mathbb{F}_4)$

$\mathbb{F}_n$ à générateurs $\{g_1, \dots, g_n\}$

$s_k := \gamma_{g_k} + \gamma_{g_k^{-1}}$ (dans $L^2(\mathbb{F}_4)$ est semi-circulaire.

def (M, τ) - un esp. de proba non-commut. :

M -fact, τ -état normal, fidèle

$A_1, \dots, A_n \subset M$ -sous-alg. unifées tq $1_M \in A_j \forall j$;

$\{A_j\}$ sont libres si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\forall q_j \in A_{j_i}$ ($i \neq j+1$)
tq $\tau(q_j) = 0 \forall j \Rightarrow \tau(q_1 \dots q_n) = 0$.

$\neq \{s_1, \dots, s_n\}^*$ libres $\Leftrightarrow (x)$ -alg. unit. eng. par $\{s_j\}$ libres.

Corollaire 1. La mesure de Brown de $T \in \mathcal{K} \mathbb{C}$

est donnée, pour $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, par

$$d\mu_{T+a\mathbb{I}}(\lambda) = \frac{a^2}{\pi} \tau \left(\left[(T-\lambda\mathbb{I})^* (T-\lambda\mathbb{I}) + a^2 \mathbb{I} \right]^{-1} \left[(T-\lambda\mathbb{I}) (T-\lambda\mathbb{I})^* + a^2 \mathbb{I} \right]^{-1} \right) d\lambda_1 d\lambda_2$$

Corollaire 2 $d\mu_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^2} d\lambda_1 d\lambda_2$

Dém. : poser $a=1, T=0$ dans le coroll. 1.

Corollaire 3. $\mu_{T+a\mathbb{I}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \mu_T$

Ex $x, y \sim N(0, 1)$ indép.

$$z = \frac{x}{y} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+z^2} dz \quad \text{-- la loi de Cauchy}$$

x, y indép.

$$x, y \sim \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \sim \frac{1}{\pi} \frac{d\lambda_1 d\lambda_2}{(1+|\lambda|^2)^2}$$

def X est stable si $\forall n, \forall X_1, \dots, X_n$ - copies indép. de X

$$\exists a_n, b_n \text{ tq } X_1 + \dots + X_n \stackrel{(dist)}{=} a_n X + b_n$$

strictement stable si $b_n = 0$.

α -stable si $a_n = n^{-1/\alpha}$, $0 < \alpha \leq 2$.

Cauchy : 1-stable.

R-diagonaux: soit (A, φ) prob. space.

$a \in A$ est R-diagonal si $K_n(a_1 \dots a_n) = 0$

pour $a_i \in \{a, a^*\}$ "non-alternant".

Alternant: $aa^* \dots aa^*, a^*a \dots a^*a$

la loi du couple $\{a, a^*\}$ est déterminée par

$$\alpha_n = K_{2n}(a, a^*, \dots, a, a^*) \quad \text{-- les "suites déterminantes"}$$

$$\beta_n = K_{2n}(a^*, a, \dots, a^*, a)$$

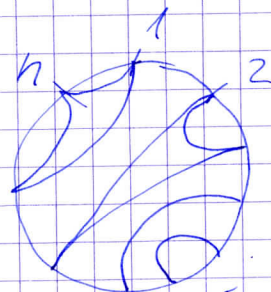
si φ tracial alors $\alpha_n = \beta_n \forall n$.

$NC(n)$ - partitions non-croisées de $\{1, \dots, n\}$

$\pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ tq $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$

$$\bigcup V_i = \{1, \dots, n\}$$

$NC:$



Cumulant: $K_\pi: \underbrace{A \times \dots \times A}_n \rightarrow \mathbb{C}$ n -linéaire

$$K_\pi(a_1, \dots, a_n) = \prod_{V \in \pi} K_{|V|}(a_{i_1}, \dots, a_{i_j})$$

où $V = \{i_1, \dots, i_j\}$

$$K_{|V|} = K_{1, \dots, |V|}$$

$$g(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} K_\pi(a_1, \dots, a_n)$$

$n=1$: $g(a) = K(a)$ et par récurrence.

$$g(a_1, a_2) = K_{\emptyset, 1, 2}(a_1, a_2) + K_{1, 2}(a_1, a_2) + \cancel{K_{1, 1, 2}(a_1, a_2)}$$

$$= K_2(a_1, a_2) + \underbrace{K_1(a_1) \cdot K_1(a_2)}_{g(a_1)g(a_2)}$$

$$\Rightarrow K_2(a_1, a_2) = g(a_1, a_2) - g(a_1)g(a_2)$$

Si a, b libres,

$$K_n(a+b) = K_n(a) + K_n(b)$$

$$K_n(a) = K_n(a, \dots, a)$$

Ex: s semicirculaire $\Rightarrow K_1(s) = 0, K_2(s) = 1, K_n(s) = 0, n \geq 3$

c circulaire $\Rightarrow K_2(c, c^*) = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1 = K_2(c^*, c)$

$$c = \frac{s + i s_2}{\sqrt{2}}$$

et $K_1(c, c^*) = 0, K_n(c, c^*) = 0, n \geq 3$

$$K_2(cc) = 0 = K_2(c^*, c^*) \Rightarrow R\text{-diagonal}$$

Ex: u unitaire "de Haar": $g(u^k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha_n = \beta_n = (-1)^{n-1} C_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \tau(B^{2n})$
 s -semicirculaire
 nomb de Catalan

u R -diagonal (Wick, Speicher)

Th Haag, Larsen JFA 2000 Th 4.4

Speicher, Sneider Inv. Math. 2001 Th 1.2

Haag, Schultz Math. Scand. 2007 : R-diag.

(M, τ) esp. de prob, τ -trace fidèle normale.

$x \in M$ R-diagonal. Alors

$$\mu_x = \nu_x \times \chi \quad \text{où} \quad \chi - \text{la mesure de Haar sur } \Pi = [0, 2\pi)$$

$$\mathbb{C} \sim [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

$$re^{i\varphi} \leftrightarrow (r, \varphi).$$

$$\text{et } \nu_x([0, s]) = F_x(s)$$

$$0 \leq s < \infty, \quad \text{où} \quad F_x^{(-1)}(t) = S_{xx^*}^{-1}(-t) = \frac{1}{S_{xx^*}(t-1)}.$$

(réciproque)

où S_{xx^*} est la transformée -s de xx^* .

$$\text{Càd. } \mu_x(B(0, (S_{xx^*}(t-1))^{\frac{1}{2}})) = t.$$

$$x \in (M, \tau) \quad \varphi_x(z) = \tau\left((1-zx)^{-1}\right) - 1 = \tau\left(\frac{zx}{1-zx}\right) \quad \text{pour } \frac{1}{z} \notin \sigma(x)$$

$$\text{et } S_x(z) = \frac{z+1}{z} \varphi_x^{(-1)}(z). \quad \text{Si } x \geq 0, \sigma(x) \subset [0, +\infty)$$

$$\varphi_x' > 0 \quad \text{sur } (-\infty, 0)$$

$$\varphi_x(z) \rightarrow -1, \quad z \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0$$

φ_x : Bijection entre des voisinages ^{connexes} de $(-\infty, 0)$ et $(-1, 0)$,

U_x et $V_x \Rightarrow \varphi_x^{(-1)}$ bien définie sur V_x .

Bercovici, Voiculescu 1993: x, y unitaires ou ≥ 0 , libres

$$\Rightarrow S_{xy}(z) = S_x(z)S_y(z).$$

th (M, τ) esp. de proba

τ -trace fidèle normale

$$a \in M \text{ ker } a = \{0\}$$

a est R -diagonal $\Leftrightarrow a = uq$, décomp. polaire
où u et q sont libres.

(A, φ) $\ast$ -proba. space, $a \in A$,

u, a $\ast$ -libres, u -unitaire de Haar

a R -diagonal $\Leftrightarrow a$ et $a_1 = ua$ ont la même
 $\ast$ -distribution.

HS y circulaire $\Rightarrow y^{-1}$ R -diag.

x, y $\ast$ -libres $\Rightarrow z = xy^{-1}$ R -diag.

$$C = \frac{S_1 + iS_2}{\sqrt{2}}$$

$$C = uh \quad \begin{array}{l} \text{-décomp.} \\ \text{polaire} \\ h \geq 0 \end{array}$$

$d\mu_C = \frac{1}{\pi} \sqrt{4-x^2} \chi_{[0,2]}(x) dx$ "quant-circulaire"

$$S_{C^*C}(z) = S_{C^*C}(z) = \frac{1}{z+1} \Rightarrow \mu_C(B(a, r)) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Lemme: $a \geq 0$, ker $a = \{0\}$.

Alors: $S_{a^*a}(z) = \frac{1}{S_a(-1-z)}$ dans un voisinage de

$$\begin{aligned} \text{Idée: } \gamma_{a^*a}(z) &= \tau((1-za^*)^{-1}) - 1 \\ &= \int \frac{x}{x-z} d\mu_a(x) - 1 \\ &= \dots = -\left(\gamma_a\left(\frac{1}{z}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{(-1,0)}{\underset{(-1)}{F_x}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{S_{xx^*}(t-1)}} \\ &= \sqrt{S_{xx^*}(-t)}. \end{aligned}$$

$$S_{x^*x}(z) = \frac{1}{z+1} \Rightarrow S_{(y^*y)^{-1}} = \frac{1}{S_{x^*x}(-1-z)} = -z$$

$$\begin{aligned} w = xy^{-1} \quad S_{w^*w}(z) &= S_{(y^{-1})^* x^* x y^{-1}}(z) = S_{y^{-1} x^* y^{-1}}(z) S_{x^*x}(z) \\ &= -\frac{z}{z+1}. \end{aligned}$$

$$\mu_w(B(0, \frac{1}{\sqrt{s^2 w (t-1)}})) = t$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{t-1}{t-1+1}}} = \sqrt{\frac{t}{1-t}} = s \Rightarrow t = \frac{s^2}{1+s^2}$$

$$\mu_w(B(0, s)) = \frac{s^2}{1+s^2} \quad \text{pour } 0 < s < \infty$$

les mesures des éléments R -diagonaux sont $\mathbb{H}$ -définies par a^*a (cas tracial)

Démon. du théorème.

$$\Delta(T + az) = \Delta(T^*T + a^2 1)^{1/2}$$

Soit u unitaire tq $T = u|T|$

$$\text{et } w = (T^*T + a^2 1)^{-1/2} (|T|y + a u^*x)$$

$$u (T^*T + a^2 1)^{1/2} w y^{-1}$$

$$= u (|T|y + a u^*x) y^{-1} = T + az$$

$$\text{donc } \Delta(T + az) = \underbrace{\Delta u}_1 \cdot \Delta(T^*T + a^2 1)^{1/2} \underbrace{\Delta(w)}_{\Delta(y)^{-1}} \underbrace{\Delta(y^{-1})}_{\Delta(y)^{-1}}$$

En fait, w est circulaire donc $\Delta(w) = \Delta(y)$.

On a $\begin{pmatrix} w \\ x' \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (défini par les moments)

v unitaire

dans $\mathcal{U}(M_2(M))$

donc x -libre avec $\{x, y\}$

d'où $\{w, x'\}$ est aussi un système circulaire, d'après

Prop. (HSR.4.4)

(N, τ) AVN avec une trace finie normale τ

$M \subset N$ sous-AVN, $n \in \mathbb{N}$, $u = (u_{jk}) \in \mathcal{U}(M_n(M))$

$C_1, \dots, C_n$ syst. circulaire. Si $\{C_1, \dots, C_n\}$ et M sont

x -libres, alors $y_1, \dots, y_n$ avec $y_j = \sum_{k=1}^n \frac{1}{i_k} C_k$ est aussi un système circulaire, libre de M .

Démon. du Corollaire 1

$$d\mu_{T+az}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 (\log \Delta (T+az - \lambda 1)) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} \quad (\text{distribution})$$

$$\begin{aligned} \stackrel{Th}{=} \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{2} \log \Delta ((T-\lambda 1)^* (T-\lambda 1) + a^2 1) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{2} \tau (\log (T-\lambda 1)^* (T-\lambda 1) + a^2 1) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

(Lem. 2.8
HS 2007) $\Rightarrow$ l'énoncé.

Démon. du Cor. 3

$$\mu_{T+az} \xrightarrow[a \rightarrow 0]{w^*} \mu_T$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C}) \quad \int \varphi d\mu_{T+az} \xrightarrow[a \rightarrow 0]{} \int \varphi d\mu_T.$$

$$L_a(\lambda) = \log \Delta (T+az - \lambda 1) = \frac{1}{2} \log \Delta ((T-\lambda 1)^* (T-\lambda 1) + a^2 1)$$

$$L(\lambda) = \log \Delta (T-\lambda 1) = \frac{1}{2} \dots$$

$$\int \varphi d\mu_{T+az} = \int_{\mathbb{C}} \varphi(\lambda) \nabla^2 L_a(\lambda) d\lambda_1 d\lambda_2 = \int (\nabla^2 \varphi)(\lambda) L_a(\lambda) d\lambda_1 d\lambda_2$$

(conv. dominée, L_a, L sous-harm. $\Rightarrow$ loc. intégr.)

$$\xrightarrow[a \rightarrow 0]{} \int \nabla^2 \varphi L(\lambda) d\lambda_1 d\lambda_2 = \int \varphi d\mu_T.$$