

Suite de Haagerup-Schultz.

N.B.: si x, y sont circulaires, $y = uh$ avec u unitaire et $h \geq 0$ avec
 $h \sim \sqrt{4-x^2} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) dx$.

alors pour $h=10$ et il existe un inverse h^{-1} non borné densément défini,
 et donc $y^{-1} = h^{-1}u^* = h^{-1}u$.

Dans Haagerup-Schultz 2007, on considère $z = uy^{-1}$ et on montre que $z \in L^p(N, \tau)$
 pour tout $p \in]0, 1[$. cela se déduit du fait que $d\mu_{|z|}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) dt$ et
 $\|z\|_p^p = \|z^{-1}\|_p^p = \int_0^1 t^p d\mu_{|z|}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t^p}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s^{\frac{2p-1}{2}}}{1+s^2} ds$. Or $\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^x dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sin(\pi x)}$
 et donc $\|z\|_p^p = \frac{1}{\sin(-(\pi \frac{p}{2} - \frac{\pi}{2}))} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi p}{2})} = \frac{1}{\cos \frac{\pi p}{2}}$.

Or, si $p \in]0, \frac{2}{3}[$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $z^p, z^{-p}, (z^2 - \lambda)^{-1} \in L^p(N, \tau)$ avec $\|(z^2 - \lambda)^{-1}\|_p \leq \|z^{-2}\|_p$.

Théorème (5.1) Si $T \in \mathcal{M}$ et $p \in]0, 1[$, alors ① $T \pm z$ est inversible et $(T \pm z)^{-1} \in L^p(N, \tau)$.

② Si $p \in]0, \frac{2}{3}[$, il existe $C^{(p)} > 0$ tel que si $T, S \in \mathcal{M}$, $\|(S \pm z)^{-1} - (T \pm z)^{-1}\|_p \leq C^{(p)} \|S - T\|$
 $= (S \pm z)^{-1} [T \pm z - S \pm z] (T \pm z)^{-1}$
 $= (S \pm z)^{-1} (T - S) (T \pm z)^{-1}$

Lemme 5.2 : Si $S, T \in \mathcal{M}$, soit

$$A_{S,T} = (1 + S^* S)^{\frac{1}{2}} S^* - (1 + T^* T)^{-\frac{1}{2}} T^*$$

$$B_{S,T} = (1 + S^* S)^{\frac{1}{2}} - (1 + T^* T)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Alors } \|A_{S,T}\| \leq \frac{2}{3} \|S - T\| \text{ et } \|B_{S,T}\| \leq \frac{2}{\pi} \|S - T\|$$

$$\text{Prop 1 (5.3) Si } T \in \mathcal{M}, \text{ soit } \mathcal{U}(T) = \begin{pmatrix} 1 + (T^* T)^{-\frac{1}{2}} T^* & -(1 + T^* T)^{-\frac{1}{2}} \\ (1 + T T^*)^{-\frac{1}{2}} & (1 + T T^*)^{\frac{1}{2}} T \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors ① } \mathcal{U}(T) \in \mathcal{U}(\mathcal{M}_2(\mathcal{M}))$$

$$\text{② } \|\mathcal{U}(S) - \mathcal{U}(T)\| \leq 2 \|S - T\|$$

Prop 2 (5.4) Si $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M}_2(\mathcal{M}))$, alors $v = u_{11}x + u_{12}y$ et $w = u_{21}x + u_{22}y$
 sont des éléments circulaires en N , et libre de $\mathcal{M}$.

(2)

$$\text{Soit } g_u(z) = vw^{-1} = (u_{11}x + u_{12}y)(u_{21}x + u_{22}y)^{-1} = (u_{11}xy^{-1} + u_{12})y(u_{21}y^{-1} + u_{22})y^{-1} \\ = (u_{11}z + u_{12})(u_{21}z + u_{22})^{-1}.$$

Alors, si $p \in]0, 1[$, $\|g_u(z)\|_p = \|z\|_p < \infty$;

si $p \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe $C_p^{(2)}$ tel que pour $u, v \in \mathcal{U}(M_2(\mathcal{M}))$ on a $\|g_u(z) - g_v(z)\|_p \leq C_p^{(2)}\|u - v\|$.

Deuxième th. Soit $T \in \mathcal{M}$ et $u(T)$ comme dans la prop. 1.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = U(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}(T^*u - y) \\ (1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}(u + Ty) \end{pmatrix} \text{ et } T+z = (Ty+u)y^{-1} = (1+TT^*)^{\frac{1}{2}}w^{-1}$$

$$\text{Alors } (T+z)^{-1} = yw^{-1}(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} \in L^p(N) \text{ et } \|w^{-1}\|_p^p = \int t^{-p} d_{|w|}(t) = \int_0^2 t^{-p} \sqrt{4-t^2} dt < \infty$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R} \xrightarrow{L^p} \mathcal{M}$

$$\text{et on a aussi } \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = U(T)^* \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}T & (1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} \\ -(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} & (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\text{En particulier, } y = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}(T^*w - v).$$

$$\text{N.B.: } T(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} = (1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}T \text{ puisque } T(1+T^*T) = (1+TT^*)T \\ \text{et donc } T_p(T^*T) = p(T^*T)T \\ \text{pour tout polynôme } p \text{ et donc.}$$

On peut alors vérifier que $U(T)$ est unitaire: on calcule $U(T)U(T)^*$:

$$(U(T)U(T)^*)_{11} = (T^*(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}T + (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}) = T^*T(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} + (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\text{Alors } (T+z)^{-1} = yw^{-1}(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}(T^*w - v)w^{-1}(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} \\ = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^*(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}w^{-1}(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}} \\ = \underbrace{T^*(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}}_{(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^*} - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}g_{u(T)}(z)(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } (S+z)^{-1} - (T+z)^{-1} = C_{S,T} + D_{S,T} \text{ avec } C_{S,T} = (1+S^*S)^{-\frac{1}{2}}S^* - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^* \\ (-D_{S,T} = (1+S^*S)^{-\frac{1}{2}}g_{u(S)}(z)(1+S^*S)^{-\frac{1}{2}} \\ - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}g_{u(T)}(z)(1+TT^*)^{-\frac{1}{2}})$$

$$\text{avec } D_1 = (1+S^*S)^{-\frac{1}{2}}g_{u(S)}(z)(1+S^*S)^{-\frac{1}{2}} = D_1 + D_2 + D_3.$$

$$\|D_1\| \leq \|B_{S,T}\| \|g_{u(S)}(z)\|_p \cdot \|(1+S^*S)^{-\frac{1}{2}}\| \leq \frac{2}{\pi} \|S-T\| \|z\|_p \leq \|z\|_p \|S-T\|.$$

(3)

$$D_2 = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_{u(S)}(z) (1+SS^*)^{-\frac{1}{2}} - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_{u(T)}(z) (1+SS^*)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\|D_2\|_H \leq \|(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}\| \|g_{u(S)}(z) - g_{u(T)}(z)\| \|(1+SS^*)^{-\frac{1}{2}}\| \leq C_p^{(1)} \|u(S) - u(T)\| \leq C_p^{(1)} 2 \|S - T\|$$

$$D_3 = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_{u(T)}(z) (1+SS^*)^{-\frac{1}{2}} - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} g_{u(T)}(z) (1+TT^*)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\|D_3\|_H \leq \|(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}\| \|g_{u(T)}(z)\| \|B_{S^*,T^*}\| \leq \|z\|_H \frac{2}{\pi} \|S^* - T^*\| \leq \|z\|_H \|S - T\|$$

$$\text{et } \|D_{S,T}\|_H^p \leq \|D_1\|_H^p + \|D_2\|_H^p + \|D_3\|_H^p \leq \|S - T\|^p (2 \|z\|_H^p + (2 C_p^{(1)})^p)$$

$$\text{et } \|C_{S,T}\|_H \leq \|C_{S,T}\| = \|(1+S^*S)^{-1}S^* - (1+S^*S)^{-1}(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^* + (1+S^*S)^{-1}(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^* - (1+T^*T)^{-1}T^*\|$$

$$\leq \|(1+S^*S)^{-1}\| \|A_{S,T}\| + \|B_{S,T}\| \|(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^*\| \leq 1$$

$$\text{Ainsi } \|(S+z)^{-1} - (T+z)^{-1}\|_H^p = \|C_{S,T} + D_{S,T}\|_H^p \leq \|C_{S,T}\|_H^p + \|D_{S,T}\|_H^p \leq 2^p \|S - T\|^p \|S - T\|^p (2 \|z\|_H^p + (2 C_p^{(1)})^p) = \|S - T\|^p (2^p + 2 \|z\|_H^p (2 C_p^{(1)})^2) (C_p^{(1)})^p$$

$$\text{et donc } \|(S+z)^{-1} - (T+z)^{-1}\| \leq C_p^{(1)} \|S - T\|$$

Démonstration du lemme. Si $\alpha \in]0, 1[$, on a $\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

$$\text{et } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}} = \pi \text{ et } \alpha > 0, \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a(a+1)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ et}$$

$$\forall R \in \mathcal{H}, (1+R^*R)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (R^*R + a + 1)^{-1} \frac{da}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Si } a \geq 1, A(a) = (a1 + S^*S)^{-1}S^* - \underbrace{(a1 + T^*T)^{-1}T^*}_{T^*(a+TT^*)^{-1}}$$

$$= (a + S^*S)^{-1} [S^*(a+TT^*) - (a+S^*S)T^*] (a+T^*T)^{-1}$$

$$= a (a + S^*S)^{-1} (S^* - T^*) (a + T^*T)^{-1} + (a + S^*S)^{-1} S^* (T - S) (a + T^*T)^{-1}$$

$$\text{Si } R \in \mathcal{H}, \|(a + R^*R)^{-\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \|(a + R^*R)^{-1}R^*\| = \|(a + R^*R)^{-1}R^*R(a + R^*R)^{-1}\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Or } t \mapsto \frac{t}{a+t^2} \text{ est majorée par } \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\text{et } \|A(a)\| \leq a \cdot \frac{1}{2} \|S^* - T^*\| \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \|T - S\| \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{2a} \|S - T\|$$

$$\begin{aligned}
 \|A\| &= \|(1+S^*S)^{-\frac{1}{2}} - (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}} T^*\| = \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (S^*S+a+1)^{-1} \frac{da}{\sqrt{a}} S^* - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (T^*T+a+1)^{-1} \frac{da}{\sqrt{a}} T^* \right\| \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^\infty A(a+1) \frac{da}{\sqrt{a}} \right\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \|A(a+1)\| \frac{da}{\sqrt{a}} \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{5\|S-T\|ba}{4(a+1)\sqrt{a}} da = \frac{5}{4\pi} \|S-T\| \pi = \frac{5}{4} \|S-T\|
 \end{aligned}$$
