

①

Intégration pour des f^u à valeurs dans un quasi-Banach X

X peut être renormé en p -Banach ; $0 < p < \infty$: muni d'une quasi-norme $\|\cdot\|$ telle que $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$: $d_p(x,y) = \|x-y\|^p$ est une distance.

Considérons $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow X$ continue.

Hypothèse : f Lipschitzienne d'ordre α avec $\alpha > \frac{1}{p} - 1$: $\|f(t) - f(s)\| \leq C|t-s|^\alpha$.

Il y a un cas plus général étudié par Kalton.

On pose $s_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n} f(a + k \frac{b-a}{2^n})$. Alors $s_n - s_{n-1} = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n} f(a + k \frac{b-a}{2^n}) - \frac{b-a}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(a + k \frac{b-a}{2^{n-1}})$

$$s_n - s_{n-1} = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n} (-1)^{k+1} f(a + k \frac{b-a}{2^n}) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n} \left[f(a + (2k-1) \frac{b-a}{2^n}) - f(a + 2k \frac{b-a}{2^n}) \right]$$

$$\|f(a + (2k-1) \frac{b-a}{2^n}) - f(a + 2k \frac{b-a}{2^n})\| \leq C \left(\frac{b-a}{2^n} \right)^\alpha$$

Utilisons $\|x+y\|^p \leq (\|x\| + \|y\|)^p$.

$$\|s_n - s_{n-1}\|^p \leq C^p \left(\frac{b-a}{2^n} \right)^p 2^{n-1} \left(\frac{b-a}{2^n} \right)^{\alpha p} = \frac{C^p}{2} \frac{(b-a)^{p(\alpha+1)}}{2^{n(\alpha p + p - 1)}}$$

Or $\alpha p + p - 1 > 0$ car $\alpha > \frac{1}{p} - 1$.

Donc (s_n) converge dans X . Def : La limite est notée $\int_a^b f(t) dt$.

Prop : $\left\| \int_a^b f \right\| \lesssim \|f\|_b + \frac{C(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha p + p - 1}$.

Théorème : Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ avec $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1}) \right\|^p \lesssim \frac{(C + \|f(b)\|)^p (b-a)}{\alpha p + p - 1} \max_i (x_i - x_{i-1})^{\alpha p + p - 1}$$

Dem ① Regardons deux subdivisions. $x : a = x_0 < \dots < x_n = b$
 $y : a = y_0 < \dots < y_n = b$

$$T_x = \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}) \quad \text{Soit } z \text{ la subdivision réunion de } x \text{ et } y :$$

$$T_y = \sum_{k=1}^n f(y_k) (y_k - y_{k-1}) \quad a = z_0 < \dots < z_r = b.$$

Pour k soient $i(k)$ tels que $[z_{k-1}, z_k] \subset [x_{i(k)-1}, x_{i(k)}]$
 $[y_{j(k)-1}, y_{j(k)}]$

$$\text{Alors } T_x - T_y = \sum_{k=1}^r [f(x_{i(k)}) - f(y_{j(k)})] (z_k - z_{k-1})$$

$$x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2} \leq \dots \leq x_n$$

Pour $\delta_n = \max x_n - x_{n-1}$ le pas de n :

$$\text{Alors } x_{i+1}, y_{j+1} \leq x_n + \max(\delta_n, \delta_y).$$

Donc $\|f(x_{i+1}) - f(y_{j+1})\| \lesssim \max(\delta_n, \delta_y)^{\alpha}$

$$\text{et } \|T_n - T_y\|^p \lesssim \max(\delta_n, \delta_y)^{\alpha p} \sum |x_n - x_{n-1}|^p \leq (n+1) \max(\delta_n, \delta_y)^{\alpha p + p}$$

② Regardons $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$:

$$S_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f(a + k \frac{b-a}{2^n})$$

$$S_n^1 = \frac{c-a}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} f(a + j \frac{c-a}{2^n})$$

$$S_n^2 = \frac{b-c}{2^n} \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} f(c + (j-2^{n-1}) \frac{b-a}{2^n})$$

$$S_n = S_n^1 + S_n^2$$

③ $\int_a^b f(t) dt = \int_{-x}^x f(-t) dt$. La différence est dans les bords... C'est évident.

$$\| \int_a^b f(t) dt \| \lesssim 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\alpha p + p} = \frac{1}{2^{n(\alpha p + p - 1)}} \rightarrow 0$$

④ $\forall c \in [a, b] \quad \|f(c)(b-a) - \int_a^b f\| \lesssim (b-a)^{\alpha p + p}$

• si $c = b$, $f(b)(b-a) = s_0$ et $s_n - s_0 = \sum (s_k - s_{k-1})$

on a $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha p + p - 1}}} \approx \frac{1}{\alpha p + p - 1}$

$$\text{et } \|s_n - s_0\|^p \lesssim \sum_{k=1}^n \frac{\|s_k - s_{k-1}\|^p}{(b-a)^{\alpha p + p}} \lesssim \frac{(b-a)^{\alpha p + p}}{2^{n(\alpha p + p - 1)}}$$

• si $c = a$: par ③

• si $c \in]a, b[$, $f(c)(b-a) - \int_a^b f = f(c)(c-a) - \int_a^c f + f(c)(b-c) - \int_c^b f$

$$\text{et } M = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f$$

$$\| \|^p \leq \sum_{i=1}^n \|f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\|^p \lesssim (x_i - x_{i-1})^{\alpha p + p - 1} (x_i - x_{i-1})$$

$$\lesssim \sum_n^{\alpha p + p - 1} (b-a)$$

Applications. Casse : (Π, τ) facteur Π , sur un Hilbert H

$$\tilde{M} = \{T: H \rightarrow H : T \text{ fermé de domaine dense affilié à } M\}$$

$$= \{T \text{ mesurable par rapport à } (\Pi, \tau)\} \text{ parce que la trace est finie.}$$

Cela facilite la formation de la somme et du produit d'opérateurs.

Formons $M^D = \{T \in M : \tau(\log^+ |T|) < \infty\}$

$$\int \log^+ t \, d\mu_{|T|}(t)$$

Pour $T \in M$, $\Delta(T) = e^{\tau \circ \log^+ |T| - \tau \circ \log^- |T|} = e^{\int \log t \, d\mu_{|T|}(t)}$

$\mu_T : \Delta(\lambda - T) = \int \log |\lambda - z| \, d\mu_T(z)$

Théorème : Si $T \in M^D$, il existe un τ -e K T -invariant et affilé à M tel que

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} K \\ K^\perp \end{matrix} \quad e = P_K \quad e^\perp = 1 - e = P_{K^\perp} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} T_{11} \in L_p(eMe) \\ \text{supp } \mu_{T_{11}} \subset B(0,1) \end{matrix}$$

$$\text{et } T_{22} \in L_p(e^\perp M e^\perp) \text{ et } \text{supp } \mu_{T_{22}} \subset \mathbb{C} \setminus B(0,1)$$

L'hypothèse nous dit que $E = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - T)^{-1} d\lambda$ est dans L^p et est idempotent : $E^2 = E$.
De plus $TE = ET$.

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow L^p$
 $t \mapsto (e^{it} - T)^{-1} e^{it}$ est lipschitzienne. Alors $\|f(t) - f(s)\| \leq |t - s|^\alpha$

et on peut définir $E = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - T)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(t) dt$

2) On pose $s_{n,h} = \frac{2\pi h}{n}$ $t_{n,j} = \frac{2\pi(j-1)}{n}$

$$E_n = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f(s_{n,h}) \quad E_n \xrightarrow{L^p} E$$

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(t_{n,j}) \quad F_n \xrightarrow{L^p} F$$

$$E_n F_n = \frac{1}{n^2} \sum_{h,j} f(s_{n,h}) f(t_{n,j}) = \frac{1}{n^2} \sum_{h,j} \frac{(e^{is_{n,h}} - T)^{-1} (e^{it_{n,j}} - T)^{-1} e^{is_{n,h}} e^{it_{n,j}}}{e^{it_{n,j}} - e^{is_{n,h}}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_h \left(\frac{1}{n} \sum_j \frac{e^{it_{n,j}}}{e^{it_{n,j}} - e^{is_{n,h}}} \right) (e^{is_{n,h}} - T)^{-1} e^{is_{n,h}} - \frac{1}{n} \sum_j \left(\frac{1}{n} \sum_h \frac{e^{is_{n,h}}}{e^{it_{n,j}} - e^{is_{n,h}}} \right) (-)$$

$$= \frac{1}{2} (E_n + F_n) + \frac{1}{n} \sum_j \frac{1}{e^{it_{n,j}} - 1} = \frac{1}{n} \frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{1}{n} \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

Or $e^{i(s_{n,h} - t_{n,j})} = e^{i \frac{2\pi}{n} (h-j + \frac{1}{2})} = e^{i \frac{2\pi}{n} (2(h-j) + 1)}$

et $\frac{1}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_{n,j}} \frac{1}{p'(z_{n,j})} = \sum_{j=1}^n \frac{z_{n,j}}{z - z_{n,j}}$ ce sont les racines de $z^n + 1 = p(z)$ notons-les $z_{n,j}$.

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_{n,j}}$$

Donc $E^2 = E$ et $ET = TE$. Donc image et noyau de E sont T -invariants.

Soit $e = P_{\overline{\text{Im } E}}$: alors $eT = Te$: eTe et Te sont mesurables;

ils coïncident sur $\text{Im } E \oplus (\text{Im } E)^\perp$ qui est dense dans H .
Comme les opérateurs sont mesurables, ils coïncident : $eTe = Te$.

Écrivons $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$ et $\tau_e = \frac{1}{\tau(e)} \tau|_{eMe}$.

Alors $T_{11} \in L_p(eMe, \tau_e)$ et $\text{supp } \mu_{T_{11}} \subset \overline{B(0,1)}$ exprime que
 $r'(T_{11}) := \sup_{z \in \text{supp } \mu_{T_{11}}} |z| \leq 1$ (rayon spectral essentiel)

" $\lim_{q \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^q d\mu_{T_{11}}(z) \right)^{1/q} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^m d\mu_{T_{11}}(z) \right)^{1/m}$ [application de l'unicité de la mesure de Brown]
 $= \lim_m \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^m d\mu_{T_{11}^m}(z) \right)^{1/m} \leq \lim_m \|T_{11}^m\|_p^{1/m}$

3) On pose pour $m \geq 1$ $G = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - T)^{-1} \lambda^m d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (e^{it} - T)^{-1} e^{i(m+1)t} dt$

On va montrer que $G = T^m E$.

Notons $E_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{i s_{n,k}} - T)^{-1} e^{i s_{n,k}}$

et $G_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{i s_{n,k}} - T)^{-1} e^{i(m+1) s_{n,k}}$

Il faut regarder si $G_m = T^m E_n$.

Il suffit de voir que $\frac{1}{n} \sum (e^{i s_{n,k}} - z)^{-1} e^{i(m+1) s_{n,k}} = \frac{z^m}{n} \sum_{k=1}^n (e^{i s_{n,k}} - z)^{-1} e^{i s_{n,k}}$

$= \frac{1}{q(z)}$ avec $q(z) = z^m - 1$

D'autre part on a $\|G\|_p \lesssim m$ et $\|\tau(e)^{-1/p} T^m E\|_p \lesssim m^{1/m}$

et $\lim_m \|\tau(e)^{-1/p} T^m E\|_p \leq 1$.

$\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - s_{n,k}} \frac{1}{q'(s_{n,k})}$

$= \frac{z^m}{q(z)}$ avec $n > m$.

On a $T_{11} = T|_K$ et $T_{11}^m = T^m|_K \stackrel{eMe \subseteq E}{=} T^m E|_K$

Donc $\|T_{11}^m\|_{L_p(eMe)} \leq \|\tau(e)^{-1/p} T^m E\|_{L_p(H)}$

et $r'(T_{11}) \leq 1$.

et on n'applique la même formule pour toutes sur l'expression de gauche.

Considérons T_{22} : on veut $\text{supp } T_{22} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$.

On considère $T^{-1} \in L_p$: il suffit de voir que $\text{supp } T_{22}^{-1} \subset \overline{B(0,1)}$

Il faut deviner le se invariant de T^{-1} : il suffit de voir que $\lim_m \| (T^{-1})^m|_K \|^{1/m} < 1$.

$$\text{et on a } K^\perp = \overline{\text{Im } E}^\perp = \ker E^* \stackrel{E^2=E}{=} \overline{\text{Im } (1-E^*)}$$

(5)

$$\text{Donc } e^\perp = P \overline{\text{Im } (1-E^*)}. \text{ Comme } ET=TE, (1-E^*)T^* = T^*(1-E^*)$$

$$(1-E^*)(T^{-m})^* = (T^{-m})^*(1-E^*)$$

$$\text{On trouve donc } \|(T_{22}^{-1})^m\|_{L^p(e^\perp + M e^\perp)} = \|(T_{22}^{-1})^{*m}\|_{L^p(e^\perp + M e^\perp)} \leq \|T(e^\perp)(T^{-m})^*(1-E^*)\|_p$$

$$4) \text{ On pose } H = -\frac{1}{2\pi i} \int (\lambda - T)^{-1} \lambda^{-m} d\lambda$$

$$H_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{i\lambda_{n,k}} - T)^{-1} e^{i(1-m)\lambda_{n,k}}$$

Si $n > m$, on considère $T^{-m}(1-E_n)$ et on réduit la p. à l'égalité

$$\text{de deux fractions rationnelles: } z^{-m} \left(1 - \frac{1}{1-z}\right) = z^{-m} \frac{z^n}{z^n - 1} = \frac{z^{n-m}}{z^n - 1}$$

et on décompose cette dernière fraction en parties élémentaires.

et de plus on sait estimer la norme $\|H\|_p \lesssim m$.

$$\text{Donc } \|(T^{-1})^{*m}(1-E^*)\|_p \lesssim m \text{ et } \lim_m \|T_{22}^{-m}\|_p^{1/m} \leq 1.$$