

Therorem: Seien $T \in M_{\mathbb{C}}(B)$ $B = \mathbb{C}$ beliebig. Existiert $K(T, B) \subseteq H$ T -invariant

on trouve M tel que $\text{supp } \mu_{T|K} \subset B$. De plus, K est hyperinvariant pour T et

$\mu = P_T(B) : H \rightarrow K$ satisfait (i) $\tau(p) = \mu_T(B)$

(ii) $\text{supp } \mu_{\pi^\perp T \pi^\perp} \subset C \setminus B$

On a vait étudié le cas où B est une boucle fermée en considérant $E(T-\lambda, r)$, avec $F(T-\lambda, r)$

$$\text{supp } \mu_{TIE} \subset \overline{B(\lambda, r)}, \quad \text{supp } \mu_{TIF} \subset \mathbb{C} \setminus B(\lambda, r).$$

Il reste à voir (2) le cas B fermé et (3) le cas B quelconque.

Prop 1: Soient $T \in M$ et $F \subset \mathbb{C}$ fermé. Il existe un $K = K(T, F) \in \mathbb{H}$ maximal

T-invariant tel que $\text{supp } \mu_{T|K} \subset F$.

Dem: $\mathbb{C} \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, r_k)$. Pour chaque $B(\lambda_k, r_k)$, $F(T-\lambda_k, r_k)$ est T -invariant. On a donc $\mu_{T|F(T-\lambda_k, r_k)} \subset \mathbb{C} \setminus B(\lambda_k, r_k)$.

On pose $K = \bigcap F(T - \lambda_n, r_n)$: K est hyperinvariant pour T et on a

$$\text{supp } \mu_{T|K} \subset \mathbb{C} \setminus B(\lambda_u, \nu_u). \text{ Donc } \text{supp } \mu_{T|K} \subset F.$$
$$(\text{On a } \text{supp } \mu_{T|E_1} \subset \text{supp } \mu_{TH_1} \text{ si } T_1 \subset E_1).$$

non-prog. ζ_n is T -invariant and $\text{supp } \mu_{T|K} \subseteq F$, also $\text{supp } \mu_{T|K} \subseteq \mathbb{C}(B(x_0, r_0))$.

et donc $K' \subset F(T - \lambda_n, v_n)$ et donc $K' \subseteq K$.

Def.: pour $T \in M$ et $F \subseteq \mathbb{C}$ fermé, $P_T(F) \in W^*(T)$ et $P_T(F): H \rightarrow K_T(F)$.

Ex 1 : Fail : (i) $P_T(\emptyset) = 0$, $P_T(\mathbb{C}) = 1$, (ii) $F_1 \subseteq F_2$ fermés implique $P_T(F_1) \leq P_T(F_2)$.

(aiv) $\{ (F_i)_{i \in I} \text{ fens, } p_T(\bigwedge_{i \in I} F_i) = \bigwedge_{i \in I} p_T(F_i)$

$$(iv) \quad \tau(P_T(F)) \leq \mu_T(F).$$

$$\mu_T = c(P_T(F)) \mu_{P_T(F) \cap P_T(F)} + c(P_T(F)^\perp) \mu_{P_T(F)^\perp \cap P_T(F)^\perp}$$

Or $\mu_{P_T(F)} = \mu_{P_T(F)} + \mu_{P_T(F)^\perp}$ (F) = 1.

Donc $\mu_T(F) = e(p_T(F)) + \dots$

Prop 2: Soit $T \in M$, $F \subseteq \mathbb{C}$ fermé, $\mu_T(\partial F) = 0$. Alors (i) $\tau(P_T(F)) = \mu_T(F)$
(ii) $K_T(F) = K_T(\overline{F \setminus F^*})^\perp$

$$F^* = \{z \in \mathbb{C} : z \in F\}^\perp$$

Dém: On écrit $\mathbb{C} \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, r_k)$

$$K_T(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T - \lambda_k, r_k). \text{ Par le fait (ii), } K_T(\overline{F \setminus F^*}) \supset K_T(\overline{B(\lambda_k, r_k)})$$

$$= E(T - \lambda_k, r_k)^\perp = F(T - \lambda_k, r_k)^\perp.$$

$$\text{Donc } K_T(F) = \bigcap F(T - \lambda_k, r_k) \supset K_T(\overline{F \setminus F^*})^\perp.$$

$$\text{Alors } \tau(P_T(F)) \geq 1 - \tau(P_T(\overline{F \setminus F^*})).$$

$$\text{Inversement, } 1 - \tau(P_T(\overline{F \setminus F^*})) \geq 1 - \mu_T(\overline{F \setminus F^*}) = 1 - \mu_T(\overline{F \setminus F})$$

$$\text{et } \mu_T(\partial F) = 0 \text{ implique ceci égale } \mu_T(F) : \mu_T(F) = \tau(P_T(F)).$$

Prop 3: Soit $T \in M$ et $F \subseteq \mathbb{C}$ fermé. Alors $\tau(P_T(F)) = \mu_T(F)$ et
 $\text{supp } \mu_{P_T(F)^\perp T P_T(F)} \subseteq \mathbb{C} \setminus F$.

Démonstration: Notons $F_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, F) \leq \frac{1}{\epsilon}\}$ et $\epsilon \mapsto \mu(F_\epsilon) \in \mathbb{R}$

Il en a qu'un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.

En tout point de continuité, $\mu_T(\partial F_\epsilon) = 0$. On peut donc choisir $\epsilon_n \uparrow \infty$ avec $\mu_T(\partial F_{\epsilon_n}) = 0$. Alors $\tau(P_T(F)) = \lim_n \tau(P_T(F_{\epsilon_n})) = \lim_n \mu(F_{\epsilon_n}) = \mu(F)$.

$$\text{On a } \mu_T = \tau(P_T(F)) \mu_{P_T(F) T P_T(F)} + \tau(P_T(F)^\perp) \mu_{P_T(F)^\perp T P_T(F)^\perp}$$

$$\text{et } \mu_T(F) = \tau(P_T(F)) + \underbrace{\tau(P_T(F)^\perp) \mu_{P_T(F)^\perp T P_T(F)^\perp}(F)}_0$$

$$\text{Si } P_T(F)^\perp = 0, P_T(F) = 1 \text{ et } \mu_{P_T(F)^\perp T P_T(F)^\perp} = 0$$

$$\text{Si } P_T(F)^\perp \neq 0$$

$$\mu_{P_T(F)^\perp T P_T(F)^\perp} = 0$$

Cas général

Lemme: Soient $T \in M$, $P \in M$ projection, $F \subseteq \mathbb{C}$ fermé.

$$\text{Alors } K_{T|P(H)}(F) = K_T(F) \cap P(H).$$

Dém: Si $Q \in P \cap P^\perp$ est la projection sur $K_{T|P(H)}(F)$ et $R = P_T(F) \wedge P$. On va montrer que $Q \leq R$ et $R \leq Q$. $[Q \leq R]$: il suffit de montrer que $Q \leq P_T(F)$, la plus grande projection telle que (i) $P_T(F) T P_T(F) = T P_T(F)$ et (ii) $\text{supp } \mu_{P_T(F) T P_T(F)} \subseteq F$.
On a $Q T Q = Q T P Q = T P Q = T Q$ et donc on a (i). Or $\mu_{Q T Q} = \mu_{Q T R Q}$ et donc $\text{supp } \mu_{Q T Q} \subseteq F$ et donc (ii).

$\boxed{P \leq Q}$: il suffit de mg (i)' $RTPR = TPR$, i.e. $RTR = TR$.

(3)

(ii)': $\mu_{RTPR} = \mu_{RTR}$ et donc leur support est inclus dans F .

$R(H) = P(H) \cap P_T(F)(H)$ est T -invariant et on a donc (i)'
et $R(H)$ est $TP_T(F)$ -invariant.

$$\mu_{TP_T(F)} = \tau_1(P) \mu_{RTPR} + \tau_1(P^\perp) \mu_{P^\perp T P^\perp} \text{ et } \tau_1(P) = \frac{1}{\tau(P_T(F))} \tau|_{P_T(F)} \mu_{P_T(F)}$$

$$\text{Donc } \tau_1(P) \mu_{RTPR}(C \setminus F) \leq \mu_{TP_T(F)}(C \setminus F) = 0.$$

Donc, - si $P \neq 0$, $\mu_{RTPR}(C \setminus F) = 0$ et on a (i)

- si $P = 0$, $P \leq Q$.

Dém. du théorème. Notons $P_T(B) = \bigvee_{K \text{ compact } \subset B} P_T(K)$.

Alors $K_T(B) = P_T(B)(H) = \bigcup_{K \subset B} K_T(K)$ est T -hyperinvariant.

Puisque $\mu_{T|K_T(B)}$ est une mesure régulière, $\mu_{T|K_T(B)}(B) = \sup_{K \subset B} \mu_{T|K_T(B)}(K)$

Pour $K \subset B$, $K_T(K) \subset K_T(B)$ est $T|_{K_T(B)}$ -invariant.

$$\text{Donc, pour } P = P_T(B), \text{ on a } \mu_{T|K_T(B)} = \tau_{PMP}(P_T(K)) \mu_{T|K_T(K)} + \tau_{PMP}(P - P_T(K)) \mu_{(P - P_T(K))T(P_T(K))}$$

$$\mu_{T|K_T(B)}(K) = \frac{1}{\tau(P)} \tau(P_T(K)) \mu_{T|K_T(K)}(K)$$

Donc $\mu_{T|K_T(B)}(B) = \sup_{\substack{K \subset B \\ \text{compact}}} \left\{ \frac{\tau(P_T(K))}{\tau(P_T(B))} \right\}$ et $\{P_T(K)\}_{K \subset B \text{ compact}}$ est une suite généralisée croissante de projections de limite forte $P_T(B)$. Donc $\mu_{T|K_T(B)}(B) = 1$ et

$$\text{supp } \mu_{T|K_T(B)} \subseteq B. \text{ De même, } \mu_T(B) = \sup_{K \subset B \text{ compact}} \{ \mu_T(K) \} = \sup \tau(P_T(K))$$

$$\text{Et on a } \mu_T = \tau(P_T(B)) \mu_{P_T(B)T P_T(B)} + \tau(P_T(B)^\perp) \mu_{P_T(B)^\perp T P_T(B)^\perp} = \tau(P_T(B)).$$

$$\text{et ainsi } \mu_T(B) = \tau(P_T(B)) + \tau(P_T(B)^\perp) \mu_{P_T(B)^\perp T P_T(B)^\perp}(B).$$

Grolland : (1) si $B \subset \mathbb{C}$ est borné, $P_T + (\mathbb{C} \setminus B)^* \perp 1 - P_T(B)$

(2) si $T \in \mathcal{M}$ et $B \subseteq \mathbb{C}$ borné, et K fermé T -invariant associé à $\mathcal{M}$, alors

$$\stackrel{(i)}{\Downarrow} \stackrel{(ii)}{\Updownarrow} K = K_T(B)$$

$$\text{supp } \mu_{P_T(B)T P_T(B)} \subset B \text{ et } \text{supp } \mu_{P_T(B)^\perp T P_T(B)^\perp} \subset \mathbb{C} \setminus B.$$

Nous avons utilisé ici l'orthogonalité entre E et F ... que Christian n'a pas montré.

Prochaine séance Da 10, 11 et 12 : après midi.