

Introduction à la théorie des matrices aléatoires

Gdt PQ
17 septembre
2013

→ Wishart
→ Wigner

Définition On se donne

$$(\alpha_i) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$$

$$(\beta_{ij}), (\gamma_{ij}) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2N})$$

$$M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$$

$$m_{ii} = \alpha_i$$

$$i < j, \quad m_{ij} = \beta_{ij} + i\gamma_{ij}$$

On impose ${}^t\overline{M} = M$ (GUE ou matrice de Wigner)

On s'intéresse à $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum \delta_{\lambda_i}$

Proposition $\hat{\mu}_N \Rightarrow$ distribution semi-circulaire

$$k \in \mathbb{N}^*$$

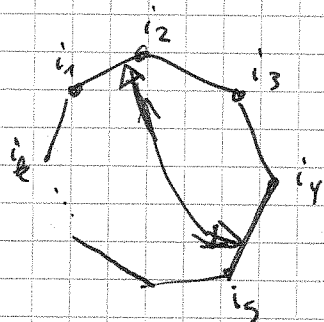
$$m_k = \int x^k d\hat{\mu}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_i \lambda_i^k$$

$$\mathbb{E}(m_k) = \frac{1}{N} \text{Tr}(M^k) = \Delta$$

$$\Delta = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_k i_1} \right)$$

On a pour $i \neq j$: $\mathbb{E}(M_{ij}) = 0$, $\mathbb{E}(M_{ij}^2) = 0$, $\mathbb{E}(|M_{ij}|^2) = \frac{1}{N}$

on identifie :



$$i_1 = i_5$$

$$i_2 = i_4$$

$$M_{i_1 i_2} = {}^t\overline{M}_{i_4 i_5}$$

$$|M_{i_1 i_2}|^2$$

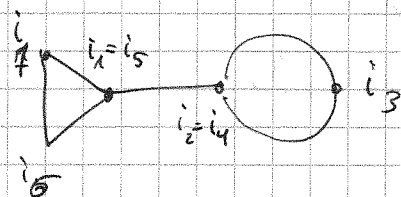
On a au plus $k/2$ classes d'équivalence. Soit l le nombre. On a $N(N-1) \dots (N-l+1)$ choix possible.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|M_{i_1 i_2} \dots M_{i_k i_1}|) &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \mathbb{E}(|M_{i_1 i_2}|^k)^{\frac{1}{2}} \dots \mathbb{E}(|M_{i_k i_1}|^k)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathbb{E}(|M_{i_1 i_2}|^k) \end{aligned}$$

Pour un certain schéma d'équivalence $\leq \text{constante} \times \frac{N(N-1) \dots (N-l+1)}{N^{k/2}}$

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ à moins que $l = k/2$

On suppose à présent k pair.



On obtient un graphe avec p sommets et $k/2$ arêtes. On a donc $p \leq \frac{k}{2} + 1$

$$\mathbb{E}(M_{i_1 i_2} \dots M_{i_k i_1}) = \prod \underbrace{\mathbb{E}(|M_{\alpha\beta}|^2)}_{\leq \frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{k/2}}$$

Le nombre de choix possibles est $\leq \frac{1}{N}$
 $N(N-1) \dots (N-p+1)$

La contribution du graphe est

$$\frac{N(N-1) \dots (N-p+1)}{N^{k/2}}$$

Le terme dominant est $p = \frac{k}{2} + 1$ (arbre)

$$\mathbb{E}(m_k) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\text{arbre} \\ \text{à } \frac{k}{2} \text{ arêtes}}} \frac{1}{N^{k/2}} \cdot N(N-1) \dots (N-p+1) + \text{termes négligeables}$$

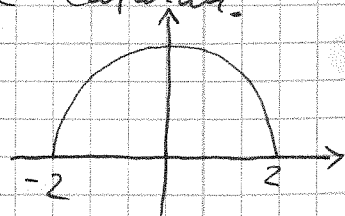
Pour faire des identifications qui donne un arbre, il faut faire des appariement non-croisé

$$\mathbb{E}(m_k) = \frac{1}{N^{k/2+1}} N(N-1) \dots (N-p+1) \# \begin{cases} \text{appariements} \\ \text{non-croisés} \end{cases}$$

Déf Les c_k sont les nombres de Catalan.

Déf La distribution semicirculaire

$$C = \frac{1}{\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x) dx$$



Prop Les moments de la loi semicirculaire sont exactement les c_k .

$E(m_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \text{moments de la loi semicirculaire}$

$\text{Var}(m_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$

En probabilité, les (m_k) tendent vers les moments de C .

Principe de grande déviation

Une suite (μ_n) de proba. vérifie un PGD à vitesse $(a_n) (\uparrow \infty)$ avec bonne fonction de taux I ($s.c.i$, $\{I \leq M\}$ compact) si $A \subset E$ $\uparrow$ semicontinu inférieurement

$$-\inf_{\dot{A}} I \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \mu_n(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \mu_n(A) \leq -\inf_{\bar{A}} I$$

Quelques propriétés :

- PGD faible : la borne supérieure vraie pour A compact
- (μ_n) est dit exponentiellement tendu si $\forall \varepsilon > 0 \exists K$ compact t.g.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \mu_n(K^c) \leq -\varepsilon.$$

$(\hat{\mu}_N)$ vérifie un PGD à vitesse N^2 et avec

$$I(\mu) = \frac{1}{2} \int x^2 d\mu(x) - \iint \log|x-y| d\mu(x) d\mu(y) - \frac{3}{4}$$

$$\{\hat{\mu}_N \in A\}$$

la densité des valeurs propres est du type

$$\text{cte} \times e^{-N^2 \iint_{x \neq y} f(x,y) d\beta(x) d\hat{\mu}_N(y)} e^{-\frac{1}{2} \sum \lambda_i^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_n$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 \times y^2}{2} - \log |x - y|$$

$$(\mu_n) \rightsquigarrow (\nu_n) \text{ avec } \nu_n = \text{cte} \times e^{-F(n)} d\mu_n(x)$$

Laplace (si F est bornée)

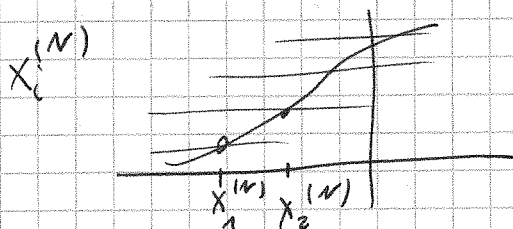
Idée: 1) $\hat{\mu}_n$ exp. tendue

2) On montre la borne sup $M > 0$

$$\int_{x \neq y} f(x, y) d\hat{\mu}_n(x) d\hat{\mu}_n(y) \geq \int_{x \neq y} f(x, y) \wedge M d\hat{\mu}_n^{\otimes 2}$$

$$\mathbb{E} \int f(x, y) \wedge M d\hat{\mu}^{\otimes 2}$$

$$3) B(\nu, \delta) = A$$



$$\nu \rightsquigarrow \hat{\nu} = \frac{1}{N+1} \sum \delta_{x_i}$$