Michaël Ulrich
24 septembre 2013
gdt proba quantique

Des matrices aléatoires aux probabilités libres

Cas classique ⇝ algèbre commutative de v.a.

Probabilités libres ⇝ algèbre (pas nécessairement commutative)

Déf On appelle espace de proba n.c. tout couple $(\mathcal{A}, \tau)$ où est une algèbre unitaire et $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ t.q. $\tau(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$.

Idée : " $\tau \leftrightarrow \mathbb{E}$ " (espérance)

Remarque On peut imposer plus de structure.
$\longrightarrow$ C^*-algèbre (τ continue et $\tau(x^*x) \geq 0$)

Déf Soit $x \in \mathcal{A}$, on appelle loi de X la famille des moments $(\tau(X^i))_{i \in \mathbb{N}}$
loi jointe de $X_1, \dots, X_n$: $\left(\tau(P(X_1, \dots, X_n))\right)_{P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle}$

On définit alors la convergence en distribution comme étant la convergence de tous les moments.

Idée : $\int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$

Déf Soient A_1, A_2 deux sous-algèbres. On dit qu'elles sont libres si
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall X_1, \dots, X_n$ t.q. $X_j \in \mathcal{A}_{i_j}$, $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$
($i_j \in \{1, 2\}$) et t.q. $\tau(X_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$
alors
$$\tau(X_1 \cdots X_n) = 0$$

Remarque 1 A_1, A_2 libre $\Rightarrow$ on connait τ sur $A_1 *_1 A_2$.

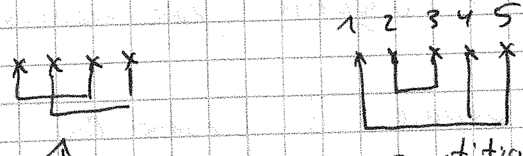
Classique $\quad \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$

Libre $\quad X \in A_1, \; Y \in A_2$

$$\tau\left[(X - \tau(X))(Y - \tau(Y))\right] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \tau(XY) = \tau(X)\tau(Y).$$

Remarque 2

Déf: On définit $\kappa_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}$ (cumulants) de la manière suivante:



croisement

partition non-croisé

Notons $NC(n)$ l'ensemble des partitions non-croisés à n éléments.

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n)$$

où
$$\kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{V_i \in \pi} \kappa_{|V_i|}(V_i)$$

Ex $\kappa_\pi(a_1, \ldots, a_5) = \kappa_3(a_1, a_4, a_5)\, \kappa_2(a_2, a_3)$

$(\pi = \quad)$

Propriétés

i) Il existe une fonction μ dite fonction de Möbius μ de $NC(\cdot)$ t.q.

$$\kappa_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \varphi_\pi(a_1, \ldots, a_n)\, \mu(\pi)$$

$$\mu : \underset{\substack{\parallel \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} NC(n)}}{NC(\cdot)} \to \mathbb{C}$$

$$\left(\text{où } \varphi_\pi(a_1 \cdots a_n) = \prod_{V_i \in \pi} \varphi(V_i)\right)$$

ii) κ_n est n-linéaire

iii) $a_1, \ldots, a_k$ sont libre si et seulement si pour tout n, $\kappa_n(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = 0$ dès qu'il existe j t.q. $i_j \neq i_{j+1}$

Corollaire Si a et b sont des éléments libres alors

$$\kappa_n(a+b, \ldots, a+b) = \ldots = \kappa_n(a, \ldots a) + \kappa_n(b, \ldots, b)$$

c-à-d les cumulants sont "additifs" sur les éléments libres.

$$\begin{cases} \mathcal{A} = M_N\left(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)\right) \\ \tau(A) = \frac{1}{N}\, \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(A)\right) \end{cases}$$

On s'interesse aux matrices de GUE

$A = (a_{ij})$, $\mathbb{E}(a_{ij}) = 0$, $\quad \mathbb{E}(a_{ij}^2) = 0 \quad$ si $i \neq j$

$$\mathbb{E}(|a_{ij}|^2) = \frac{1}{N}$$

$$\mathbb{E}(a_{ii}^2) = \frac{1}{N}$$

$\tau(A^n) = ?$

$$\tau(A^n) = \frac{1}{N} \sum_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{E}(a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_n i_1})$$

$\downarrow$ formule de Wick

$$= \frac{1}{N} \sum_{i_1 \dots i_n} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(n)} \prod_{(r,s) \in \pi} \underbrace{\mathbb{E}(a_{i_r i_{r+1}} a_{i_s i_{s+1}})}_{\frac{1}{N} \delta_{i_r i_{s+1}} \delta_{i_{r+1} i_s}}$$

"pair partitions"

$$= \frac{1}{N^{1+\frac{n}{2}}} \sum_{\pi} \sum_{i_1 \cdots i_n} \prod_{r=1}^{n} \delta_{i_r i_{\pi(r)+1}}$$

$\gamma = (1, \dots, n)$ un cycle

$$\tau(A^n) = \frac{1}{N^{1+\frac{n}{2}}} \sum_{\pi} \sum_{i_1 \dots i_n} \prod_{r=1}^{n} \delta_{i_r i_{\gamma\pi(r)}}$$

On introduit

$\#(\gamma\pi) =$ nombre de cycles

$$\tau(A^n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(n)} N^{\#(\gamma\pi) - 1 - \frac{n}{2}}$$

Or, $\#(\gamma\pi) - 1 - \frac{n}{2} \begin{cases} = 0 & \text{pour les appariements non-croisés} \\ < 0 & \text{pour les appariements croisés} \end{cases}$

~~non croisés~~

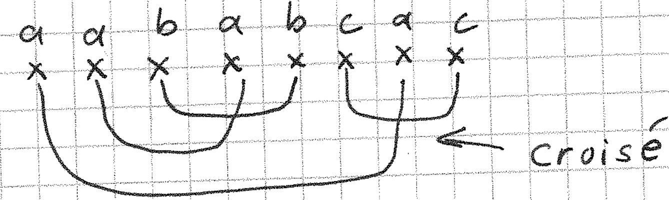
On fait $N \to \infty$:

$$\tau(A^n) \longrightarrow \#\text{ appariements non-croisés}$$
$$= \text{moments de la loi semicirculaire}$$

On se donne $A_1, \dots, A_k$ indépendants dans le GUE :

$$P_2(n) \longrightarrow P_2^k(n) \quad \text{appariements respectant la couleur}$$

<u>Exemple</u> :



$$\tau\left(A_{i_1}^{p_{i_1}} \cdots A_{i_\ell}^{p_{i_\ell}}\right) \longrightarrow \#\left\{\pi \in NC_2^{\cdots}(p_{i_1} + \dots + p_{i_\ell})\right\}$$

$i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}$ = moments d'une famille libre de k éléments semicirculaires.

<u>Remarque</u> $t \longrightarrow A_t$ mouvement brownien à valeurs dans les matrices symétriques

$$\mathbb{E}(|a_{ij}|^2) = \frac{t}{N}$$

Asymptotiquement, on obtient un mouvement brownien libre.