

Sur la somme de module de fonctions holomorphes

avec E. Dauterive
de l'Université de Pétersbourg.

Soyent $f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Que peut-on dire de $|f| + |g|$?

Vice versa, quelles fonctions réelles se représentent ainsi?

Def: $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$. On écrit $\varphi_1 \approx \varphi_2$ s'il existe $C > 0$ tq $\frac{\varphi_1}{C} < \varphi_2 < C\varphi_1$
" φ_1 et φ_2 sont équivalents"

Problème: Si $w: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$, existe-t-il $f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $|f| + |g| \approx w$?

Et non se restreint à w radiale: $w(z) = w(|z|)$?

(C'est le cas lorsqu'on considère w poids)
parfois

Théorème: Soit $w: \mathbb{D} \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}_+$ un poids tel que $w(t) \nearrow +\infty$. Alors

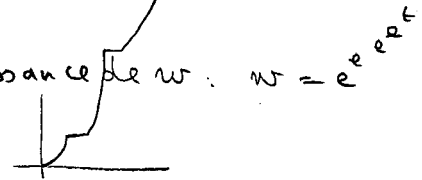
(i) $\exists f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ $|f| + |g| \approx w$

(ii) $w \approx$ une fonction $\log^*$ -convexe [Def: f est $\log^*$ -convexe si $\log f(t)$ est convexe de $\log t$]

C'est presque la $\log$ -convexité, quoique +.

N.B.: il n'y a pas ici de restriction sur la croissance de w : $w = e^{e^{e^t}}$

les contre-exemples sont de la forme



La condition (ii) vient du th. de 3 arcs: si $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $M_f(t) = \sup_{|z|=t} |f(z)|$ est $\log$ -convexe de $\log t$. [Hadamard]

Soit w un poids radial. $A^w = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{w(z)} < \infty\}$ est l'espace à croissance dominée.

Corollaire: Si w vérifie (ii), alors il existe $f, g \in A^w$ tels que $|f| + |g| \approx w$ dans $\mathbb{D}$.

N.B.: et $|f_1| + \dots + |f_n| \approx w$? Si $n=1$, il n'y a pas de solution.

Si $n \geq 2$, la réponse est (2) indépendante de n .

N.B.: on aurait aussi pu écrire $\max(|f|, |g|)$ au lieu de $|f| + |g|$.

Généralisation au cas de $\mathbb{C}^d$:

① $B_d = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| < 1\}$

② $D \subset \mathbb{C}^n$ domaine borné circulaire, à bord lisse.

Notons $r_D(z) = \inf \{ \rho > 0 : z \in \rho D \}$ la f^e de Minkowski de D.

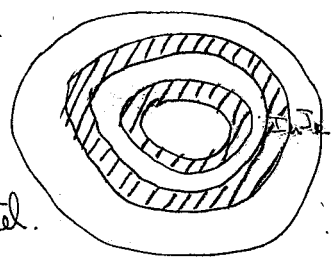
Si w est $\log^*$ -convexe sur $[0,1)$, il existe $f_1, \dots, f_n \in \text{Hol}(D)$ tels que $\sum |f_k(z)| \approx w(r_D(z))$. Ici n dépend de D.

On utilise les polynômes de Ryll-Wojtaszczyk-Alexandrov.

Remarques historiques: 1^{er} résultat: 1991: Runney-Ullrich: $w(z) = \frac{1}{1-|z|}$
 puis Gauthier, Xiao (2002) puis Gurela, Pelaez, Perez-Gonzalez, Rüttö (2008).
 [$\frac{w(1-\epsilon)}{w(1-7\epsilon)} < C$, w double: Alaboun-Doublser 2012]

Méthode: séries lacunaires d'Hadamard.

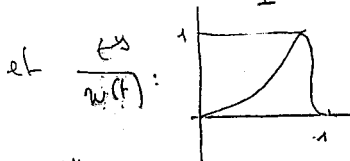
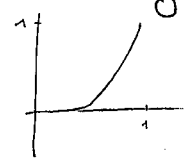
Idee de la demonstration: pour decriver le comportement de f holomorphe sur des anneaux: construire $f, g \in \text{Hol}(D)$ tels que $|f|, |g| \lesssim w$ et $|f| \asymp w$ sur les anneaux blancs et $|g| \asymp w$ sur les striés.



Il faut se considérer

on a un problème réel.

Considérons t^{α} : ($\alpha \in \mathbb{R}$)



et prenons a_n tels que $\|a_n \frac{t^{\alpha}}{w(t)}\|_{\infty} = 1$.

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^{m_k}$$

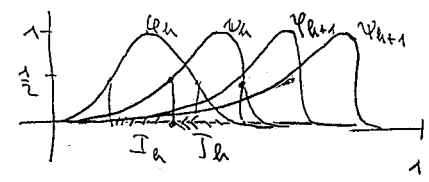
$$g(t) = \sum_{k \geq 0} b_k t^{m_k}$$

$$\varphi_k(t) = \frac{a_k t^{m_k}}{w(t)}$$

$$\psi_k(t) = \frac{b_k t^{m_k}}{w(t)}$$

$$\|\varphi_k\|_{\infty} = 1$$

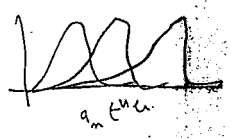
$$\|\psi_k\|_{\infty} = 1$$



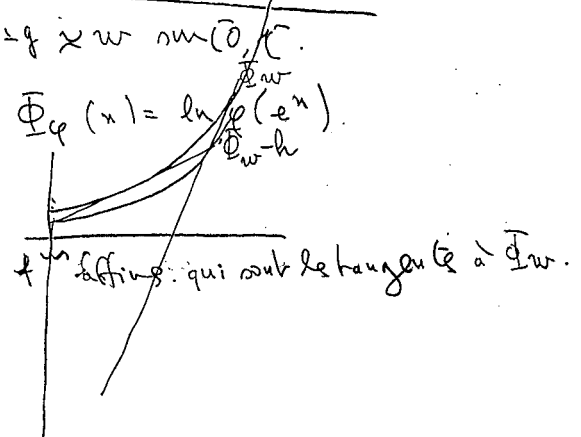
Ce qu'on veut, c'est $\left(\sum_{j \neq k} p_j < \frac{1}{3} \text{ sur } I_k \right)^*$ Alors $\frac{f}{w} = \sum \varphi_k \lesssim 1$ sur I_k
 $\sum_{j \neq k} \psi_j < \frac{1}{3} \text{ sur } J_k$. $\frac{g}{w} = \sum \psi_k \lesssim 1$ sur J_k .

C'est * qui requiert du travail.

Idee: convexité: $\varphi: [0,1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ donne $\Phi_{\varphi}(x) = \ln \frac{\varphi(e^x)}{\varphi(e^{-x})}$.



donne



Applications : Soit w log-convexe :

A^w Y treillis

$$\boxed{\{f \in Y \mid |f| \leq w\}} = \{f \in Y\}$$

$$C_\varphi^Y : f \mapsto g \cdot f \circ \varphi \text{ où } \varphi : \mathbb{D} \xrightarrow{\text{holom}} \mathbb{D} \\ g \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

Corollaire $C_\varphi^Y : A^w \rightarrow Y$ borné $\Leftrightarrow g \cdot (f \circ w) \in Y$.

De nombreux cas particuliers ont été publiés.

$$D.2.1 : A^w(\mathbb{D}) \subset L^p(\mu) \Leftrightarrow w \in L^p(\mu) \quad [\varphi(z) = z, g=1]$$

On peut aussi considérer les opérateurs de Cesaro.

Espaces de Bloch : $B = \{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{\mathbb{D}} |f'(z)| (1-|z|) < \infty \}$

$$H^\infty \subset B \subset A^V \text{ avec } V(t) = \log \frac{e}{1-t}.$$

Corollaire : $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Notons $\sqrt{V}(t) = \sqrt{\log \frac{e}{1-t}}$: alors

$$\textcircled{1} \quad C_\varphi : A^{\sqrt{V}} \rightarrow H^\infty$$

$$\textcircled{2} \quad C_\varphi : B \rightarrow H^p$$

$$\textcircled{3} \quad \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{D}} \left(\log \frac{e}{1-\varphi(r\xi)} \right)^{p/2} d\mu(\xi) < \infty. \quad \left. \vphantom{\int_{\mathbb{D}}} \right\} \text{Koren 2003.}$$

$(\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{3})$ corollaire du théorème 1.

Q : quel est l'espace A^D le plus proche de B ? $A^{\sqrt{V}}$.