François Lemeux

Règle de fusion et propriété de Haagerup sur des groupes quantiques compacts.

I Groupes quantiques compacts.

Considérons le groupe symétrique (classique) S_n et $C(S_n) = \{f : S_n \to \mathbb{C}\}$.

Soit $p_{ij} : S_n \to \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto p_{ij}(\sigma) = \sigma_{ij}$. On a

$$(R)\begin{cases} p_{ij}^2 = p_{ij} = p_{ij}^*, \quad p_{ij}p_{ik} = \delta_{jk}p_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^n p_{ij}. \\ p_{ji}p_{ki} = \delta_{jk}p_{ji} \end{cases}$$

<u>Théorème</u> [Banica/Wang ?] C'est la C^*-algèbre universelle commutative engendrée par n^2 générateurs p_{ij} avec les relations (R).

<u>Objectif</u>: définir l'analogue non commutatif de cette C^*-algèbre.

Déf [Wang]. Soit $N \geq 1$. $C(S_N^+)$ est la C^*-algèbre universelle engendrée par N^2 générateurs v_{ij} tels que $v_{ij} = v_{ij}^2 = v_{ij}^*$ $\sum_{i=1}^n v_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^n v_{ij}$ (et cela implique $v_{ij}v_{ik} = \delta_{jk}v_{ij}$, $v_{ji}v_{ki} = \delta_{jk}v_{ji}$)

<u>Remarque</u>: Sur $C(S_N)$ on peut construire une application linéaire

$$\Delta : C(S_N) \to C(S_N \times S_N)$$
$$f \mapsto \Delta(f) = [(x,y) \mapsto f(xy)]$$

Tentons sur $C(S_N^+)$: Posons $\Delta : C(S_N^+) \to C(S_N^+) \otimes C(S_N^+)$

$$v_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^N v_{ik} \otimes v_{kj}$$

Dans $C(S_n)$ on a

$$\begin{array}{ccc} C(S_N) & \xrightarrow{\Delta} & C(S_N) \otimes C(S_N) \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes id \\ C(S_N) \otimes C(S_N) & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & C(S_N) \otimes C(S_N) \otimes C(S_N) \end{array}$$

qui commute : $(\Delta \otimes id) \circ \Delta(f)(x,y,z) = f((xy)z)$
$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(f)(x,y,z) = f(x(yz))$

Cela motive la <u>définition</u> : Un groupe quantique compact (GQC) est une paire $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ où $C(\mathbb{G})$ est une C^*-algèbre unitale et $\Delta : C(\mathbb{G}) \to C(\mathbb{G})^{\otimes 2}$ est <u>coassociative</u> : $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$
et satisfait la <u>propriété d'annulation</u> : $\text{span}\{\Delta(a)(b \otimes 1)\} = \text{span}\{\Delta(a)(1 \otimes b)\}$
$= C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$.

Déf : Une <u>coreprésentation unitaire</u> de dim finie N de $\mathbb{G}$ est $u = (u_{ij}) \in M_N(C(\mathbb{G}))$ $\simeq M_N(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{G})$

telle que $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} u_{ik} \otimes u_{kj}$

Elle est irréductible si $(T \otimes 1)u = u(T \otimes 1)$ pour $T \in M_N(\mathbb{C})$

implique que $T = \lambda \, Id_{\mathbb{C}^N}$ pour un λ.

u, v deux corep sont équivalents si $\exists T \in B(H_u, H_v)$ inversible tel que $(T \otimes 1) u = v (T \otimes 1)$.

th [Woronowicz] • $\exists h : C(\mathbb{G}) \to \mathbb{C}$ état de Haar : $(h \otimes id) \Delta(a) = h(a) 1 = (id \otimes h) \Delta(a)$

• Toutes les corep irréductibles sont de dim finie

• Toute corep est équivalente à une somme directe d'irréductibles.

II Règles de fusion et de propriété de Haagerup pour $S_N^+ = (C(S_N^+), \Delta)$

<u>Th</u> (Banica)$_{N \geq 5}$: Il existe une famille maximale $(v^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ de corep. unitaires irréductibles unitaires telles que

(i) $v^{(0)} = 1_{C(S_N^+)}$

$v = (v_{ij}) \simeq 1 \oplus v^{(1)}$

(ii) $\overline{v^{(t)}} = (v_{ij}^{(t)*}) \simeq v^{(t)}$

(iii) $v^{(s)} \otimes v^{(t)} = \bigoplus_{k=0}^{2\min(s,t)} v^{(s+t-k)}$ [règle de fusion]

<u>Ex</u> : • $s \in \mathbb{N}$: $v^{(s)} \otimes v^{(1)} = v^{(s+1)} \oplus v^{(s)} \oplus v^{(s-1)}$

• Le caractère d'une coreprésentation $v^{(s)}$ est $\sum_{i=1}^{d_s} v_{ii}^{(s)} = \chi_s$.

Il satisfait donc $\chi_s \chi_1 = \chi_{s+1} + \chi_s + \chi_{s-1}$.

• Le th de Banica donne aussi $d_t = \dim v^{(t)} = \pi_t(N)$

où π_t est le t^e polynôme de Tchebychev défini par $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = X - 1$, $\pi_1 \pi_t = \pi_{t+1} + \pi_t + \pi_{t-1}$.

Considérons aussi (A_t) défini par $A_0 = 1$, $A_1 = X$, $A_1 A_t = A_{t+1} + A_{t-1}$.

Alors <u>Prop</u> : si $2 < x_0 < 3$ fixé, $x \in (x_0, N]$, alors $\frac{A_t(x)}{A_t(N)} \leq C_{x_0} \left(\frac{x}{N}\right)^t$ pour $t \in \mathbb{N}^*$

pour une constante C_{x_0} qui ne dépend que de x_0.

Application : $\frac{A_{2t}(\sqrt{x})}{A_{2t}(\sqrt{N})} \leq C_{x_0} \left(\frac{x}{N}\right)^t \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ si $x \in]x_0, N[$.

Def [HAP] Si h état de Haar et $(L^2(G), \pi_h)$ la rep. GNS associée à $(x,y) \longmapsto h(x^*y)$, $\pi_h : C(G) \to B(L^2(G))$; notons $C_r(G) = \pi_h(C(G)) \simeq C(G)/_{\ker \pi_h}$

G est la C^*-algèbre réduite associée à G

$L^\infty(G) = C_r(G)''$: algèbre de von Neumann de G.

Def : Brannan[2011] $G = (C(G), \Delta)$ GQC est de type Kac (h est une trace!).

On dit que G a HAP si $L^\infty(G)$ l'a, i.e., $\exists\ (T_x)_{x\in\Lambda}$ des applications $T_x : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ N.U.C.P., $h \circ T_x = h$ telles que

(i) $T_x : L^2(G) \to L^2(G)$ est un opérateur compact ;

(ii) $\|T_x a - a\|_{L^2} \xrightarrow[x\in\Lambda]{} 0$ pour tout $a \in L^\infty(G) \hookrightarrow L^2(G)$.

(Cette définition est plus potable sur le dual qui est discret).

Th (Brannan 2011) Si G est un gqc Kac et qu'on considère la C^*algèbre engendrée par les χ_α $\alpha \in \mathrm{Irr}(G)$, notée $C(G)_{\text{central}}$, et φ un état sur $C(G)_{\text{central}}$: $T_\varphi = \sum_{\alpha\in \mathrm{Irr}\, G} \frac{\varphi(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} p_\alpha$ est une contraction unitale de $L^2(G)$ et la restriction de $T_\varphi : L^\infty \to L^\infty$ est NUCP ; $h \circ T_\varphi = h$.

$p_\alpha : L^2(G) \to L^2(G)_\alpha = \mathrm{span}\{u^\alpha_{ij} : 1 \le i,j \le d_\alpha\}$; $p_\alpha \perp p_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$;

$L^2(G) = \bigoplus_{\alpha\in \mathrm{Irr}(G)} L^2(G)_\alpha$, $\chi_{\bar\alpha} = \sum_{i=1}^{d_\alpha} u^{\bar\alpha}_{ii} = \sum_i u^{\alpha\,*}_{ii}$

Th [$N \geq 5$] [Brannan] S_N^+ a HAP.

Dem : "preuve" : $C^* - \langle \chi_k : k \in \mathbb{N} \rangle$: pour tout k, $\chi_1 \chi_k = \chi_{k+1} + \chi_k + \chi_{k-1}$

$v = (v_{ij}) = 1 \oplus v^{(1)}$.

$$C^*(1,\chi) \simeq C(\mathrm{Spec}\,\chi) = C([0,N])$$

Ceci par l'identification $C^* - \{\chi_k\} \longrightarrow C[0,N]$, $\chi_k \longmapsto \pi_k$ | $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = \lambda - 1$, $\pi_k \pi_1 = \pi_{k+1} + \pi_k + \pi_{k-1}$

Si $x \in\,]0,N[$ on pose $\frac{\varphi_x(\chi_k)}{d_k} = \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(N)} = \frac{A_{2k}(\sqrt{x})}{A_{2k}(\sqrt{N})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et donc compacité.

Et S_N^+ a HAP par $(T_{\varphi_x})_{x\in]0,N[}$.

Objectif : faire la même chose sur les groupes de réflexion quantiques.

Def : $N \geq 1$, $s \in \mathbb{N}^*$: $H_N^{s+} = (C(H_N^{s+}), \Delta)$ est la C^*-algèbre universelle engendrée par N^2 générateurs U_{ij} tels que — les U_{ij} sont normaux ; $U = (U_{ij})$ et ${}^tU = (U_{ji})$ unitaires, et et les $U_{ij}U_{ij}^*$ sont des projections et $U_{ij}^s = U_{ij}U_{ij}^*$. "racines s^{es} de l'unité".

Th (Banica et Vergnioux) Les corep. irréd. de $H_N^{S^+}$ sont indexées par les mots : $\langle \mathbb{Z}_s = \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}\rangle$ $(i_1 \dots i_k$ où $i_j \in \mathbb{Z}_s)$; et si $x \in \langle \mathbb{Z}_s\rangle$,

$$\rho_x \otimes \rho_y = \sum_{\substack{x = vt \\ y = \bar{t}w}} \rho_{vw} \oplus \rho_{v \cdot w} \quad \text{où} \quad (i_1 \dots i_k)\cdot(j_1 \dots j_p) = i_1 \dots i_{k-1}(i_k + j_1) j_2 \dots j_p$$

Th (Lemeux) $H_N^{S^+}$, $N \geq 4$, a la propriété de Haagerup (HAP).

Idée $(N \geq 5)$ états : $C^* - \langle \chi_\alpha : \alpha \in \langle \mathbb{Z}_s \rangle\rangle$

$$\pi : C(H_N^{S^+}) \longrightarrow C(S_N^+) \quad \text{par universalité des } C^*\text{-algèbres.}$$

$$\pi(\chi_\alpha) \in C(S_N^+)_{central} \simeq C[0,N] \quad \text{où} \quad \chi_k \longmapsto \pi k$$

Prop : $\pi(\chi_\alpha) = \prod_{i=1}^{k} A_{l_i}(\sqrt{x})$ pour $\alpha \in \langle \mathbb{Z}_s \rangle$

On obtient des états sur $C^*(H_N^{S^+})_{central}$, $\psi_x(\chi_\alpha) = ev_x \circ \pi(\chi_\alpha) = \prod_{i=1}^{k} A_{l_i}(\sqrt{x})$

$$T_{\psi_x} = \sum_{\alpha \in Irr(H_N^{S^+})} \frac{\psi_x(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} p_\alpha = \sum_{\alpha \in \langle \mathbb{Z}_s\rangle} \prod_{i=1}^{k_\alpha} \frac{A_{l_i}(\sqrt{x})}{A_{l_i}(\sqrt{N})} p_\alpha .$$

ρ_x, $x \in \langle \mathbb{Z}_s \rangle$, $x = i_1 \dots i_k$. — Mais il y a aussi une description en produit par couronne.

On réintroduit : $x = i_1 \dots i_k \longrightarrow a t^{i_1} a \, a t^{i_2} a \dots a \, t^{i_k} a$
$= a t^{i_1} a^2 t^{i_2} a^2 \dots a^2 t^{i_k} a$.

ex : 1 $\quad ata$
10 $\quad ata\, a t^0 a a = ata^3$
101 $\quad atat^0 a\, ata = ata^4 ta$.

$C(H_N^{S^+}) = C^*(\mathbb{Z}_s) *_w (C(S_N^+))$.
$\chi_\alpha \overset{\pi}{\longmapsto} \Delta_1 A \Delta_1 \in C(S_N^+)_{central}$
$C(H_N^{S^+})_{central}$

$$\underbrace{C(A_N(\Gamma)) = C^*(\Gamma) *_w C(S_N^+)}_{a_{ij}(g)}.$$

Si $N = 2$, $C^*(\mathbb{Z}_s) *_w C(\mathbb{Z}_2) = C^*(\mathbb{Z}_s * \mathbb{Z}_s) * C(\mathbb{Z}_2)/R$ car commutation.
$= C^*(\mathbb{Z}_s * \mathbb{Z}_s) \otimes C(\mathbb{Z}_2)$
$= C^*(\mathbb{Z}_s * \mathbb{Z}_s \times \mathbb{Z}_2)$.

et si $N = 3$?? ouvert.

et si $s = \infty$, on remplace $\mathbb{Z}_s$ par $\mathbb{Z}$ et ça marche toujours.

Q : Il reste O_N^+, S_N^+ et les groupes de Moritz Weber.
Q : groupes vraiment q. qui n'ont pas Haagerup ?