Baptiste OLIVIER
29/1/2013

Variante de la propriété (T) / espaces L^p non commutatifs.

Propriété rigidité sur les groupes topologiques

Article de Bader-Furman-Gelander-Monod ('07)

Th (Kazhdan '60) : réseaux finiment engendrés ! dans les groupes à propriété (T)

(I) Propriété (T) et représentations orthogonales sur les espaces L^p

(II) Action par isométries affines sur les L^p.

I 1) Propriété (T)

$L^2(X,\mu)$ e. Hilbert standard

G groupe topologique l.c. à base dénombrable (au moins pour les props de points fixes)

$\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(X,\mu))$ (opérateurs unitaires) est une représentation si

- π est multiplicative
- $g \longmapsto \pi(g)x$ continue pour chaque $x \in L^2(X,\mu)$

. Notons $(L^2)^{\pi(G)} = \{x \in L^2 : \forall g \ \pi(g)x = x\}$

- Une suite de vecteurs $(v_n) \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ est presque invariante (p.i.) si
  - $\|v_n\|_2 = 1$
  - $\forall K \ \sup_{g \in K} \|\pi(g)v_n - v_n\|_2 \longrightarrow 0$

Définition : G a (T) si $\forall \pi$ rep. unitaire $\pi|_{((L^2)^{\pi(G)})^\perp}$ n'a pas de suite de p.i.

ex : groupes de rang supérieur, comme $SL_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$

Prop : si G a (T), $G = \langle K \rangle$ avec K compact, $G/\overline{\langle G,G\rangle}$ est compact, G unimodulaire, etc.

2) Variante de cette propriété : propriété $(T_{L_p(X,\mu)})$

(se généralise aux espaces superréflexifs)

$\pi : G \longrightarrow O(L_p(X,\mu))$ groupe des isométries linéaires bijectives.

On définit pareillement $L_p^{\pi(G)}$ et p.i.

Comme on a $L_p^* \simeq L_{p'}$ avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, on définit la rep. contragrédiente par

$\int \pi(g)f\, h = \int f(\pi'(g)h)$ pour $f \in L^p$ et $h \in L^{p'}$.

<u>Th</u> : [BGFM] $L_p = L_p^{\pi(G)} \oplus L_p'(\pi)$ où $L_p'(\pi) = \{x \in L_p : \forall y \in L_{p'}^{\pi'(G)} \ \langle x,y\rangle = 0\}$.
$1 < p < \infty$

Remarque : une telle décomposition est valable si B superreflexif.
Si B est seulement reflexif, quel est le pb ? Continuité de la contragrédiente.

Déf : G a (T_{L_p}) si $\forall \pi$ rep. orth. $\pi|_{L_p'}$ n'a pas de suite dep.i.
$1<p<\infty$

Th [BFGM] $(T) \Rightarrow (T_{L_p(X,\mu)})$. La réciproque vaut si μ est sans atome.
$1<p<\infty$ (sinon, passez d'isométries)

Rem : $(T) \to (T_F)$, F s.e. fermé de L_p si p n'est pas un entier pair.

3) Propriété $(T_{L_p(\mathcal{N})})$ relative aux L_p non commutatifs.

On prend une algèbre de von Neumann $\mathcal{N} = \mathcal{N}'' \subset B(\mathcal{H})$ et τ semi-finie
et $L_p(\mathcal{N},\tau) = \overline{\{x \in \mathcal{N} : \underbrace{\tau(|x|^p)}_{\|x\|_p^p} < \infty\}}^{\|\cdot\|_p}$

Ex : si $\mathcal{N} = L^\infty(X,\mu)$, $\tau = \int \cdot \, d\mu$ on retrouve $L^p(X,\mu)$.
si $\mathcal{N} = B(\mathcal{H})$ et $\tau = \mathrm{Tr}$, on trouve $C_p = \{x \in K : \mathrm{Tr}(|x|^p) < \infty\}$.
idéaux de Schatten.

À comparer avec la définition de Haagerup qui marche pour toute a.v.N. $\mathcal{N}$

À nouveau, si $1<p<\infty$, $L_p^* = L_{p'}$ et on définit pareillement π' et
$\pi : G \to O(L_p)$ donne une décomposition $L_p = L_p^{\pi(G)} \oplus L_p'(\pi)$.

$\to$ $\leq$ de Clarkson McCarthy

Déf : G a $(T_{L_p(\mathcal{N})})$ si ...

Th (Olivier '11) Si $\mathcal{N}$ a.v.N, $(T) \Rightarrow (T_{L_p(\mathcal{N})})$
$1<p<\infty$

Idée de la preuve : inspirée de BGFM : À partir d'une rep sur L_p, en construire une sur L_2.

Outils de preuve : – application de Mazur $M_{p,q} : L_p \longrightarrow L_q$
$x = \alpha|x| \longmapsto \alpha|x|^{\frac{p}{q}}$
déc. pol.
$\longrightarrow$ elle est l.u.c.
$\longrightarrow$ Si on a $\pi^p : G \xrightarrow{\text{rep.}} O(L_p)$, on pose $\pi^2 = M_{p,2} \circ \pi^p \circ M_{2,p}$
Pourquoi π^2 est-elle linéaire ?! C'est à cause de la structure des isométries des espaces L_p :
– $L_p(X,\mu)$: th. de Banach-Lamperti
– $L_p(\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ $\frac{1}{2}$ finie : [Yeadon]
– $L_p(\mathcal{N})$, cadre général : [Sherman, valable que sur les élts positifs, mais elle donne qqch de convenable]

Réciproque : $(T_{L^p(\mathcal{W})})$ implique-t-elle (T) ?

On sait déjà que $L_p(X,\mu)$ ✓

ℓ_p ✗ car $O(\ell_p)$ est très petit.

$S_p = \{x \in \bigoplus_n x_n \in \bigoplus M_n : \sum \mathrm{Tr}\, |x_n|^p < \infty\}$ ✗

$= \bigoplus_{\ell_p} C_p^n$.

C_p ✓ car plus d'isométries : $Ux = uxv$ ou $Ux = u\,{}^t x\, v$ et pas seulement sur chacun des blocs.

R le facteur II_1 hyperfini ✓

II Actions par isométries affines sur L_p : 1) propriété (F_H)

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ (isométries affines sur $\mathcal{H}$)

Déf. : G a (FH) si $\forall \alpha$ rep. affine α a un point fixe.

Th [Delorme Guichardet '77] G a (T) ssi G a (F_B) [ici il faut que G soit à base dén.]

2) Propriété F_B pour B Banach.

cf Th de Mazur-Ulam : les isométries surjectives sont des isométries affines.

Déf : G a (F_B) si ...

Th (BGFM) $(F_B) \Rightarrow (T_B)$ pour tout Banach B

$(T) \Rightarrow (F_{L^p(X,\mu)})$ pour $1 \leq p < 2 + \varepsilon(G)$.

$\underline{\underline{\ \ }}$ a été rajouté après. $\ \varepsilon(G) > 0$

Il y a un lemme du centre ds les espaces superréflexifs.

$\rightarrow$ orbites bornées.

Pour $p=1$, on démontre directement qu'il y a des orbites bornées

Rem : pour certains groupes hyperboliques, comme $Sp(n,1)$, il existe $p>2$ tel que G n'a plus $F_{L_p(X,\mu)}$

3) Propriété $(F_{L_p(\mathcal{W})})$

Th [Margulis-Fisher] $\forall \mathcal{W}$ a.v.N $(T) \Rightarrow (F_{L_p(\mathcal{W})})$ pour $2-\varepsilon(G) \leq p \leq 2+\varepsilon(G)$.

$\rightarrow$ $\leq$ de Clarkson-McCarthy.

¿Version Banach ? selon modules de convexité ou lissité uniforme ? Hilbert faibles ? θ-Hilbert. Mr. Cependant ...

Mais la méthode pour $p<2$ ne se généralise pas : $\|\ \|_p$ induit, dans le cas commutatif, un noyau conditionnellement de type négatif, ce qui donne un plongement de L_p dans $\mathcal{H}$.

$\rightarrow$ Il n'y a pas de plongement de L_p dans $\mathcal{H}$.

Ex : $M_2(\mathbb{R}) \subset C_p$ et aussi $C_p \not\hookrightarrow \mathcal{H}$ au sens $\| \|_p^p = \| \|_2^2$.

i.e., la q. est si $\| \|_p^{p/2}$ fait un noyau conditionnellement de type négatif.

Question : A-t-on $(T) \Rightarrow (F_{C_p})$ lorsque $1 \leq p \ll 2$?

4) Quelques exemples de groupes ayant $F_{L_p(W)}$

Th : $G = \prod \underbrace{G_i(k_i)}$ où k_i corps locaux

k_i-points de groupes algébriques simples connexes de rang >2

G a $(F_{L_p(W)})$ pour $1<p<\infty$ et tout W

et pour $p=1$? Conjecture aussi : (F_B) pour B superréflexif.

Th (Masato Mimura) $SL_n(\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k])$ avec $n \geqslant 4$ ont $F_{L_p(W)}$, $1<p<\infty$

Application : (Navas) Γ groupe discret. Si $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(S^1)$ et si

$1<p<\infty$, $\alpha > \frac{1}{p}$ qui préserve l'orientation

Γ a $F_{L_p(X,\mu)}$, alors $\Phi(\Gamma)$ est fini : Γ est un groupe de rotations.

Remarque : au niveau des sous-espaces, problème :

Si on a une isométrie sur un s. ev fermé de L_p on peut la prolonger de manière unique quand $p \notin 2\mathbb{N}^*$.

Il faut regarder les ~~x~~-isométries cb.

On pourrait donc représenter dans les x-isométries cb. Beaucoup de choses passent à ce cadre.

Ex de groupes discrets ayant (T_{L_p}) et non (T) :

$SL_2(\mathbb{Z})$ (prop de Howe Moore : $\langle \pi(g)u, v \rangle \xrightarrow[g \to \infty]{} 0$ si pas de p.i.

Le groupe libre a-t-il Howe-Moore ?