

I Matrice de Hilbert ~ 1905

Étant donnée une matrice $(a_{j,k})$, représente-t-elle un opérateur linéaire continu ?

I.e., $(a_{j,k}) \in \mathcal{L}(e_n, e_j)$ avec (e_j) h.o.n d'un espace de Hilbert H ,

a-t-on $|\sum_j a_{j,k} x_j x_k| \leq M \sum_j x_j^2$. Le meilleur M est $\|A\|$.

Prototype : $a_{j,k} = \frac{1}{(j+k)^\alpha}$, $\alpha > 0$

Si $\alpha = 1$, Hilbert : $a_{j,k} = \frac{1}{j+k}$. Th : A est continue et $\|A\| \leq \pi$.

$$\sum_j \frac{x_j x_k}{j+k} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_j (-1)^j x_j \cos jt - \sum_j (-1)^j x_j \sin jt \right)^2 dt.$$

la 2 manquait dans Weyl (Hilb)

C'est pourquoi on fait on a $\|A\| \leq \pi$

Schur 1911 : Cite Weyl et rajoute une erreur. il oublie la $(-1)^j$.

Il donne une autre démonstration que $\|A\| \leq \pi$.

Puis la dom de Hilbert est la bonne. C'est celle qu'on donne dans le contexte des op. hermitiens.

$\frac{1}{j-k}$, ou $\frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}$. Fejér, Riesz, Hardy

Mais HLP renforce la preuve avec le 2.

Schur 1911 : Continuité des formes quadratiques.

(CN) Si $A \in \mathcal{L}(H)$, $\sup_j \sum_k |a_{j,k}|^2 < \infty$ et $\sup_k \sum_j |a_{j,k}|^2 < \infty$.

(CS) Si $\sum_k |a_{j,k}|^2 < \infty$

Pour chaque $\|A(e_n)\|^2 \leq \|A\|^2 \|e_n\|^2$, i.e. la CN.

Ainsi $\alpha = 1$ est le cas critique.

On peut avoir $(a_{j,k}) \in \mathcal{L}(H)$ et $(|a_{j,k}|) \notin \mathcal{L}(H)$. Ex: $a_{j,k} = \frac{1}{j-k}$ (avec $\frac{1}{0} = 0$).

Théorème (F. Piquard) : Si $(a_{j,k}) \in (CN)$, cela ne suffit pas pour que $(a_{j,k}) \in \mathcal{L}(H)$.

Mais, il existe $(b_{j,k})$ tel que

- 1) $|b_{j,k}| > |a_{j,k}|$
- 2) $B \in \mathcal{L}(H)$.

Considérons $a_{j,k} = c_{j+k} = \hat{\varphi}(j+k)$ avec $\frac{1}{j+k} = \hat{\varphi}(j+k)$ avec

$$|\sum x_j x_k \hat{\varphi}(j+k)| \leq \|\varphi\|_\infty \sum x_j^2$$

Hilbert a encore eu de la chance: Th (Nehari 1957) Si $(c_{j+k}) \in \ell^2(\mathbb{N})$, existe φ telle que $c_n = \hat{\varphi}(n)$.

$(a_{j,k})$ dépend d'une fonction φ symbole de A.

II Opérateurs à symbole.

Ensemble de fonctions. Pour $\varphi \in S$, a-t-on un opérateur continu T_φ ?
Puis on s'intéresse aux propriétés des opérateurs.

T compact si $\exists (P_j \text{ de rang fini}) : \|T - P_j\| \rightarrow 0$.

Notons $a_n(T) = \inf_{\text{rang } R \leq n} \|T - R\|$ alors T compact $\Leftrightarrow a_n(T) \rightarrow 0$.

T dans la classe de Schatten S^p si $\sum a_n(T)^p < \infty$.

Questions: 1) T_φ est-il continu?

2) T_φ est-il compact?

3) $T_\varphi \in S_p$?

4) $a_n(T_\varphi)$

5) Quels sont les φ de rang fini qui approchent le mieux?

Hankel: $a_{j,k} = c_{j+k}$
 $\varphi \in L^\infty = S$

Hartman 1960: classe de Sarason

Peller 1990: $\varphi \in BMO$

Peller-Negodski-Treil: C'est que suite a_n est bornée
au sens D.

$\rightarrow$ anneaux d'Hankel

Composition.

Ovi (Littlewood 1975)

Caractérisation compliquée.

Luecking - Zhu '90

2017 avec Li, Lefèvre, Rodriguez Pino

? D.e. C_φ composé avec une projection.

III Opérateurs de composition.

$$H = H^2 = \{f(z) = \sum c_n z^n : \sum |c_n|^2 = \|f\|^2 < \infty\}$$

Rappel: Grande question ouverte: un op. sur un e. Hilbert admet-il un s.e. invariant non trivial.

Notons $S = \{\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe}\}$:

Considérons $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$. Essayez $f(\frac{1+z}{2})$... vous allez zheun peu dans le potage

Si $a \in \mathbb{D}$, $f(a) = \langle f, K_a \rangle$, $K_a \in H^2$ avec $K_a(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z}$.

On a $C_\varphi^*(K_a) = K_{\varphi(a)}$

IV Iteration holomorphe.

On a accès au spectre, i.e. aux valeurs propres de C_φ . f est une fonction propre de C_φ si $f \circ \varphi = \lambda f$, $f \in H^2$, équation qui a été étudiée bien auparavant.

Si C_φ est compact, alors il existe $a \in D$ tel que $\varphi(a) = a$ (théorème de Rouché)

Or on a $|\varphi'(a)| \leq 1$ (Schwarz). Or $|\varphi'(a)| = 1$ impossible car sinon on a un automorphisme du disque. Donc $|\varphi'(a)| < 1 \dots$ pt fixe attractif.
Considérons $\varphi_n = \varphi \circ \dots \circ \varphi = \varphi^{[n]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ (H. de Carathéodory).

à l'échelle vaut
Considérons $z_{n+1} = \varphi(z_n)$. λ est "nécessairement" $\varphi'(a)$ [ou une puissance].

Supposons $\lambda \neq 0$: $f = \frac{1}{\lambda} f \circ \varphi$: $f_0(z) = z$, $f_{n+1}(z) = \frac{1}{\lambda} f_n(\varphi(z))$

$f_n = \frac{\varphi_n}{\lambda^n}$. φ_n renormalisée: alors $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$ et

$\sigma \circ \varphi = \lambda \sigma$ et $\sigma'(a) = 1$: σ vérifie une condition de normalisation.

$\text{spec}(C_\varphi) = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\}$.

Cela implique que $\dim(C_\varphi) \geq r^\infty$, avec $uv > 0$

Donc décroissance par trop rapide vers 0.

En général, on a une décomposition de Schmidt:

$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, v_n \rangle u_n$, où $(u_n), (v_n)$ deux l.o.o.
et $\lambda_n = a_n^2$.

Décomposition de Schmidt.

et $T(v_n) = \lambda_n u_n$: donc T échange les v_n et les u_n .

On remplace cette décomposition par

$C_\varphi^* \left(\underbrace{K_{a_j}}_{v_j} \right) = \underbrace{K_{\varphi(a_j)}}_{u_j}$ les v_j forment une suite "presque" orthonormée

Q: le produit se int pour les opérations de composition