Martine Queffélec

14/12/2013

Problème : classer les nombres réels selon leurs propriétés ... algébriques ...

Affiner la classification algébrique / transcendant (disproportionnée en faveur des nombres transcendants)

... et qu'est-ce qu'on entend par nombre réel.

Un nombre réel peut être donné par un développement

... en base entière

... en fraction continue.

But : classer les nb réels suivant leur approximation par des rationnels.

→ ex : th de Liouville

Or on ne sait même pas si $\zeta(5) = \sum \frac{1}{n^5}$, γ constante d'Euler, $\beta_2 = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ sont rationnels ou non !

(1) Développement : combinatoire des mots :

dyadique $x = \sum_1^\infty \frac{b_n(x)}{2^n}$, $x \in [0,1]$, $b_n \in \{0,1\}$.

$b_1(x) = b_1 = \lfloor 2x \rfloor$, $b_{n+1}(x) = b_n(\{2x\})$. Donc, si on considère $S : x \longmapsto 2x \bmod 1$, on est en train d'étudier

$$\begin{array}{ccccc} x & [0,1) & \longrightarrow & [0,1] \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (b_n) & \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \end{array}$$

RCF le développement en fraction continue. si $x \notin \mathbb{Q}$ $x = \lim \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$

regular continued fraction.

$a_1 = a_1(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

$a_{n+1}(x) = a_n(Tx)$ où T est l'application de Gauss, $T : x \longmapsto \{\frac{1}{x}\}$

$= \lim [0, a_1, \dots, a_n]$ $a_i \geq 1$

$$\begin{array}{ccccc} x & [0,1] \setminus \mathbb{Q} & \xrightarrow{T} & [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (a_n(x)) & (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*} & \xrightarrow{\sigma} & (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*} \end{array}$$

(2) Approximation diophantienne

Un nombre rationnel s'approche difficilement par un nombre rationnel :

$0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq}$ pour $\frac{p}{q} \neq r$. C'est ainsi qu'on démontre l'irrationnalité de e et $\zeta(3)$.

Dirichlet (1842) : Si $x \notin \mathbb{Q}$, $|x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^2}$ pour une cté de $\frac{p}{q}$. On sait les trouver avec le développement en f.c. Si $x \notin \mathbb{Q}$, $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \dots a_n]$

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} \le \frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_n} \le \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_{n+1} q_n} \le \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

Ces inégalités admettent une sorte de réciproque.

Donc si a_{n+1} est grand, !!

Th [Roth 1955]. Si x est algébrique, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ n'a qu'un nombre fini de solutions. le nombre est majorable mais les solutions elles-mêmes ne sont pas effectives.

<u>Critère de transcendance</u> : Si x est approchable à l'ordre $q^{2+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$, alors x est transcendant.

<u>Contre-exemple</u> : e est approchable à l'ordre $q^2 \frac{\log q}{\log \log q}$. Donc sa transcendance ne résulte pas du th de Roth.

Déf. : Bad = {x malapprochable, i.e., x approchable à l'ordre 2 et pas mieux}

$= \{x : \exists c \, \forall \frac{p}{q} \, |x - \frac{p}{q}| \ge \frac{c}{q^2}\}$

N.B : $\supset$ {x irrationnel quadratique}

Mais BAD contient des nombres transcendants

Prop : Bad est l'ensemble des x à quotients partiels bornés.

Dém : Supposons $x \in$ Bad : j'ai $\left.\begin{array}{l} |x - \frac{p_n}{q_n}| \ge \frac{c}{q_n^2} \\ \qquad \le \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} \end{array}\right\}$ et donc $a_{n+1} \le \frac{1}{c}$ pour tout n.

Réciproquement, si $a_n \le K$ pour tout n,

on a la propriété d'optimalité : si $q_n \le q < q_{n+1}$, $\|qx\| \ge \|q_n x\|$, où $\|\cdot\| = d(\cdot, \mathbb{Z})$

Fixons q ainsi : $q\left|x - \frac{p}{q}\right| \ge \|qx\| \ge \|q_n x\| = q_n\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \ge q_n \cdot \frac{1}{q_n^2(2 + a_{n+1})} = \frac{1}{q_n(2+K)} > \frac{1}{q(2+K)}$

Les systèmes ergodiques sous-jacents ... on a des théorèmes métriques.

Notation : mesure d'irrationalité : $\nu(x) = \sup\{\tau : |x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^\tau}$ infiniment souvent$\}$

Pb : c'est trop grossier.

On a $\nu(x) \ge 2$ (Dirichlet)

$\nu(e) = 2$

$\nu(x) > 2 \Leftrightarrow x$ vérifie Roth.

Notation : $K_\varphi = \{ x : |x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^2\varphi(q)}$ infiniment souvent $\}$
pour $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ croissante. (K pour Khinchin)

Alors $\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon>0} K_{q^\varepsilon}$ ($\mathcal{R}$ pour Roth)

$\mathcal{L} = \bigcap_{\varepsilon>0} K_{q^\varepsilon}$ ($\mathcal{L}$ pour Liouville : très bien approchable)

Deux exemples célèbres et étonnants

③ Le nombre de Fibonacci

C'est le nombre $x = \sum_{j\geq 1} \frac{x_j}{2^j}$ où (x_j) est le mot infini de Fibonacci :

on considère $\zeta : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ (mots construits sur $\{0,1\}$)

$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 10$$

ζ ζ 1
10
10.1 $= \zeta(1)\zeta(0)$
101.10
⋮

(x_j) n'est pas périodique !

Prop : $x = [0; 2^0, 2^1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^5, \dots, 2^{f_{n-2}}, \dots]$ ... x n'est pas un irrationnel quadratique.

Comment on fait ?

Si on écrit $x = \sum_1^\infty \frac{x_j}{2^j}$, en tronquant, on approche très mal x.

Idée : en tronquant puis en répétant un morceau, c'est bien mieux.

$x = \zeta^n(1) \mid \zeta^n(0)\, \zeta^n(1)\, \zeta^n(1) \dots$

$r_n = \zeta^n(1) \mid \zeta^n(1)\, \zeta^n(1) \dots$

Or $\zeta^n(0) = \zeta^{n-1}(1)$ et $\zeta^n(1) = \zeta^{n-1}(1)\zeta^{n-1}(0) = \zeta^{n-1}(1)\zeta^{n-2}(1)$

de sorte que $x = \zeta^n(1)\, \zeta^{n-1}(1)\, \zeta^{n-2}(1) \mid \zeta^{n-3}(1)\, \zeta^{n-2}(1) \dots \mid$
$r_n = \zeta^n(1)\, \zeta^{n-1}(1)\, \zeta^{n-2}(1) \mid$

Donc $r_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $q_{n+1} = 2^{f_n - 1} q_n + q_{n-1}$ et r_n est une réduite
et $q_n = 2^{f_n} - 1$.

Ainsi $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} \ll \frac{1}{2^{f_{n+1}+f_n}} = \frac{1}{2^{f_{n+2}}} \approx \frac{1}{q_n^{2+\rho}}$ avec $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} >$

et Roth s'applique.

4 Nombre de Thue-Morse

$\xi = \sum' \frac{t_j}{2^j}$ $t = (t_j)$ est point fixe de τ morphisme sur $\{0,1\}$, où $\tau(0) = 01$, $\tau(1) = 10$

Mahler (1929) développe sa méthode à cette occasion.

t'_j obtenus en changeant $\begin{matrix} 0 \text{ en } 1 \\ 1 \text{ en } -1 \end{matrix}$: $F(x) = \sum_{j \geq 1} t'_j x^j$ satisfait $F(x) = (1-x)F(x^2)$

Alors $F(\alpha)$ est transcendant pour tout α algébrique pour $|\alpha| < 1$.

On aimerait avoir une idée du dév^t en fraction continue : on ne sait rien...

Mais Prop (Yann Bugeaud) $\nu(\xi) = 2$. [et donc Roth ne s'applique pas]

On a montré que $F_{2^{2^n}+1}$ et $2^{2^n} F_n$ sont des dénominateurs de réduites de ξ.

→ on a donc une infinité de réduites et ainsi une nouvelle démo de la transcendance en utilisant une version p-adique de Roth, le th de Ridout:

Th Soit $p_1, \dots, p_k$ nombres premiers et $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha \in [0,1]$. S'il existe une $\infty^{té}$ de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $\prod |p|_{p_i} \prod |q|_{p_i} |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, alors α est transcendant.

→ Ici, on prend $\{2\}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$ réduites de dénominateur $Q_n = 2^{2 \cdot 2^n} F_n$:

$\underbrace{|Q_n|_2}_{\text{majoré par } 1 \text{ parce que je ne la connais pas.}} |\xi - \frac{P_n}{Q_n}| \leq \frac{1}{Q_n^2} \frac{1}{2^{2 \cdot 2^n}} \simeq \frac{1}{Q_n^{2+\frac{1}{3}}}$

Q ouverte : ξ est-il dans Bad ? Conjecture : non

Maintenant, un peu plus de théorie métrique.

I Questions et réponses métriques :

Q : quelle "chance" a-t-on d'être en mesure d'appliquer Roth ?

Th (Khinchin) $m(K_\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum \frac{1}{q\varphi(q)} < \infty \\ 1 & \text{si } \sum \frac{1}{q\varphi(q)} = \infty \end{cases}$

$R = \bigcup_{\varepsilon > 0} K_{q^\varepsilon}$ et donc $m(R) = 0$

$\text{Bad}^c \supset \{x : |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log q} \text{ infiniment souvent}\}$ et donc $m(\text{Bad}) = 0$.

Conjecture célèbre :

<u>Conj</u> (Khinchin) $\mathrm{Bad} = \{\text{irrationnels quadratiques}\} \cup \{\text{transcendants mal approchables}\}$

<u>Def</u> : (Borel) un nombre x est normal en base 2 si tout mot sur $\{0,1\}$ apparaît avec la fréquence attendue dans le développement de x.

L'ergodicité de S montre que presque tout nombre est normal. En fait, en toute base. Considérons le nombre concaténation de tous les mots finis. Il est normal.

<u>Conjecture</u> : (Borel) Tout irrationnel algébrique est normal dans toute base.

Complexité : $u = (u_n)$ à valeurs dans un alphabet $\{0,1,\dots,b-1\}$:

$p(n) = \#$ mots de longueur n dans u : $p(n) \leq b^n$

$p(n) = n$ pour un n entier $\iff$ u est périodique

La suite de Fibonacci vérifie $p(n) = n+1$.

Conj bis : Si x irr alg alors $p(n) = b^n$ en base b

cela résoudrait

Mahler (conj.) Si $(a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_1^\infty \frac{a_n}{2^n}$ et $\sum_1^\infty \frac{a_n}{3^n}$ sont algébriques, sont-ils rationnels ?

Outils :

$$\begin{tikzcd}
\text{Roth} \arrow[r, "\text{version p-adique}"] \arrow[d, "\text{multidimensionnel}"'] & \text{Ridout} \arrow[d] \\
\text{W. Schmidt} \arrow[r] & \text{Schlickewei, Evertse}
\end{tikzcd}$$

(Th du sous-espace)

Reparlons de l'hypothèse de Roth : Si α irr algébrique, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ n'a qu'un nombre fini de solutions, i.e. $q|q\alpha - p| < \frac{1}{q^\varepsilon}$

Si on pose $L_1(x,y) = x$, $L_2(x,y) = x\alpha - y$ ceci s'écrit $|L_1(q,p)L_2(q,p)| < \frac{1}{\|(q,p)\|_\infty^\varepsilon}$

Th de Schmidt : Soit $L_1 \dots L_n$ n formes linéaires à n variables à coefficients algébriques et linéairement indépendants. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\{\bar{x} \in \mathbb{Z}^n : |\prod_{i=1}^n L_i(\bar{x})| < \frac{1}{\|\bar{x}\|_\infty^\varepsilon}\}$ est contenu dans une $\cup$ finie de sous-espaces de $\mathbb{Q}^n$.

Corollaire : Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et supposons que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\sigma+1}}$ et $\left|\alpha^2 - \frac{p'}{q}\right| < \frac{1}{q^{\tau+1}}$ avec $\sigma + \tau > 1$ pour une ssuite de $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}$, alors α est soit quadratique soit transcendant.

Dém : Supposons α algébrique de $\partial^\circ \geq 3$. Définissons L_1, L_2, L_3 : $L_1(x,y,t) = x$, $L_2(x,y,t) = x\alpha - y$, $L_3(x,y,t) = x\alpha^2 - t$

Alors $\left|\prod L_i(q_n, p_n, p'_n)\right| = q_n \left|q_n\alpha - p_n\right| \left|q_n\alpha^2 - p'_n\right| = \frac{q_n}{q_n^{\sigma+\tau}} \leq \frac{1}{q_n^{\underbrace{\sigma+\tau-1}_{\varepsilon > 0}}}$.

Donc il existe $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 q_n + r_2 p_n + r_3 p'_n = 0$ infiniment souvent.

Ainsi $r_1 + r_2 \frac{p_n}{q_n} + r_3 \frac{p'_n}{q_n} = 0$ et donc $r_1 + r_2\alpha + r_3\alpha^2 = 0$. Donc contradiction.

Le meilleur résultat à ce jour dans la direction de la conjecture de Borel est :

Th (Adamczewski et Borel) : Si α est un irrationnel algébrique, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \infty$.

Dém : Si pour tout n, $\alpha = 0, V_n^s$ avec $s > 1$ "est périodique sans préfixe" avec $|V_n| \to \infty$, alors α est transcendant (Schmidt).

Si pour tout n $\alpha = 0, U_n V_n^s$, avec $|V_n| \to \infty$, $\frac{|U_n|}{|V_n|}$ bornée, alors α est transcendant.

C'est ici qu'on a besoin du th. de Schlickewei.)

Derniers résultats métriques : Un nombre $\underbrace{\text{mal approchable}}_{\text{"pauvre"}}$ peut-il être $\underbrace{\text{normal}}_{\text{complexité max}}$.

Que peut-on dire de Bad $\cap$ K, où K ensemble triadique de Cantor

$[x \in K \Leftrightarrow x = \sum' \frac{\varepsilon_j}{3^j}, \varepsilon_j \in \{0,2\}]$

Eh bien, $\sum' \frac{1}{3^{2^k}} \in \text{Bad}$.
$\uparrow$ croissance trop faible.

et donc $\sum' \frac{2}{3^{2^k}} \in \text{Bad} \cap K$ et $\sum' \frac{2}{3^{n!}} \in \mathcal{L} \cap K$.

Pour finir, ① $\mu(\text{Bad} \cap K) = 0$ [très difficile] μ mesure de Haar du Cantor.

② $\mu(R \cap K) = 0$ [Barrach-Weiss]

③ Il y a une infinité non dénombrable de nombres normaux en toute base et à quotients partiels $\in \{1,2\}$.

... Calcul de mesures et de coefficients de Fourier...