Gilles Godefroy
13/3/2013

L'intérêt de savoir qu'une forme linéaire atteigne sa norme.

S. Simons : (1972) : E ensemble, $B \subseteq E$, $(x_n) \subseteq \ell_\infty(E)$ bornée

Supposons que $\forall (\lambda_n)$, $\lambda_n \geq 0$, $\sum \lambda_n = 1$ $\exists b \in B$ $\sup_E \sum_{n=0}^\infty \lambda_n x_n = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n x_n(b)$.

Alors $\underbrace{\sup_{b\in B} \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n(b)}_{\text{comportement ponctuel sur } B} \geq \inf \underbrace{\sup_E \{c \,:\, c \in \operatorname{conv}((x_n))\}}_{\text{comportement global sur } E}$.

comportement ponctuel sur B : ex : $x_n(b) \to 0$ pour $b \in B$

Ex : $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(K)$ bornée et $f_n \xrightarrow[\tau_p(K)]{} 0$, alors $\exists c \in \operatorname{conv}(f_n)$ $\|c\|_\infty < \varepsilon$.

Fait : X e. Banach, $C \subseteq X^*$ convexe fermé borné. S'il existe $B \subseteq C$ tel que pour tout $x \in X$ $\sup_C (x) = \max_B (x)$ et que $\underbrace{B \text{ est séparable en } \|\cdot\|}_{\text{permet d'avoir une vraie suite}}$, alors $C = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}(B)$

cf rep. intégrale, points extrémaux.

↳ comme la CV dominée : th séq / topologie non métrisable.

Dém : Simons + Hahn-Banach.

Th : Petunin-Plichko, 1974 : X e Banach séparable, $S \subseteq X^*$ s.e. $\|\cdot\|$ fermé tel que

① $S \subseteq NA(X) = \{x^* \in X^* \,:\, \exists x \in S_X \ \|x^*\| = x^*(x)\}$

② S sépare X

Alors $X = S^*$

Idée : Prenons $R_S : X^{**} \to S^*$ et $B = R_S(B_X)$ frontière de B_{S^*}.

X séparable implique B séparable et $R_S|_X$ injective

$B_{S^*} = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}(R_S(B_X))$ et donc $B_{S^*} = R_S(B_X)$.

Godefroy 1986 : redémonstration en méconnaissance de l'article de 1974.

Remarque : $S \subseteq NA(X) \iff B_X$ est $\tau_p(S)$-compacte.

Rem : S séparable et nécessaire : $X = \ell^1([0,1])$ et $S = \mathcal{C}[0,1] \subseteq X^*$ ...

Question : $X \not\supset \ell^1([0,1])$ + hyp. de Plichko-Petunin implique-t-elle $X = S^*$?

(pour les Murciens ...)

Cor : X séparable, $S \subseteq X^*$ n.e. $\|\cdot\|$ fermé, séparant X (i.e., $\overline{S}^{w^*} = X^*$).
Alors $S \subseteq NA(X) \Rightarrow S$ 1-normant, i.e. $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_S\}$.
[On a S normant $\Leftrightarrow B_X$ $\tau_p(S)$-fermé]

Exemple : $X \subseteq L^1 = L^1(\Omega, \mu)$. Si B_X est L_0-fermée, soit $X^\# = \{x^* \in X^* : x^*|_{B_X}$ L^0-continue$\}$.
X espace bien disposé
Alors $X^\#$ sépare $X \Rightarrow (X^\#)^* = X$.
B_X L^0-fermée $\Leftrightarrow X^{\perp\perp} = X \oplus_1 L^1_s \cap X^{\perp\perp}$
et $L^{1^{**}} = L^1 \oplus_1 L^1_s$
Cela peut se voir par le Th de Komlos : $X^\# \subseteq NA(X)$.
Ex : $X = H^1(D)$ et $X^\# = VMO$.

Un autre exemple : M métrique compact et $0 \in M$. $Lip_0(M) = \{f : M \xrightarrow{Lip} \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$
$Lip_0(M) = \mathcal{F}(M)^* = \overline{\operatorname{span}}^{\|\cdot\|}\{\delta_x : x \in M\})^*$ muni de $\|f\|_{Lip}$
Considérons alors $lip_0(M) = \{f \in Lip_0(M) : \forall \varepsilon > 0$ $\{(x,y) \in M^2 : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon d(x,y)\}$
est compact dans $M^2 \setminus \Delta$
Cela veut dire que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x,y)$.
C'est impossible dans les espaces métriquement convexes.
Ex : $[0,1]$, $0 < \alpha < 1$, $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha$: $Lip(d_\alpha) = lip(d_\alpha)$.
Remarque : Si $lip_0(M)$ sépare $\mathcal{F}(M)$, alors $lip_0(M)^* = \mathcal{F}(M)$ et $lip_0(M) \subseteq NA(\mathcal{F}(M))$.

Ex : $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ouvert borné et $v \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$, > 0 sur U.
Notons $H_v(U) = \{f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\sup_U |fv| < \infty\}$
$H_{v,0}(U) = \{f \in H_v(U) : \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subseteq U$ compact $\sup_{U \setminus K} |fv| < \varepsilon\}$
Alors $B_{H_v(U)} = \tau_K$-compacte. $H_v(U) = G_v(U)^*$.
Q : Est-ce que $H_v(U) = H_{v,0}(U)^{**}$
On a $H_{v,0}(U) \subseteq NA(G_v(U))$. Est-ce que $H_{v,0}(U)$ sépare $G_v(U)$??

<u>Op. compacts</u>. Soient X, Y des espaces réflexifs séparables.
$L(X, Y^*)$ est le dual de $(X \hat{\otimes} Y)^*$ et
$K(X, Y^*) \subseteq NA((X \hat{\otimes} Y))$: c'est une reformulation (espaces réflexifs !) de :
$T \in K(X, Y^*)$: $\|T\| = \sup_{B_X} \|T(x)\|_{Y^*}$ et $T(B_X)$ est $\|\cdot\|$-compact et $\|T\| = \|T(x_0)\|_{Y^*}$
$= |\langle T(x_0), y_0 \rangle|$
$R_{K(X,Y^*)} : X \hat{\otimes} Y \longrightarrow K(X, Y^*)^*$ puisque $B = R_{K(X,Y^*)}(S_{X \hat{\otimes} Y})$ $= |\langle T, x_0 \otimes y_0 \rangle|$
$=$ frontière de $B_{K(X,Y^*)^*}$

On aurait aussi pu faire comme Feder-Saphar.

N.B.: on n'utilise pas la propriété d'approximation

<u>Prop:</u> X, Y réflexifs séparables. Si $J : X\hat{\otimes} Y \to X\check{\otimes} Y$ injective, alors $\forall T \in K(X,Y^*)$ $\exists (R_n) \subset R(X,Y^*)$ $\|T-R_n\| \xrightarrow[n]{} 0$ et $\forall T\in L(X,Y^*)$ $\exists (S_n) \subseteq R(X,Y^*)$ $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_K} T$ et $\|S_n\| \le \|T\|$.

Idée: J injectif $\to$ $\{x^*\otimes y^*\}$ sépare $X\hat{\otimes} Y$ et $X^*\otimes Y^* \subseteq K(X,Y^*)$ sépare $X\hat{\otimes}Y$.

Par Relunin-Plichko, $X\hat{\otimes}Y \equiv K(X,Y^*)^*$ et $L(X,Y^*) = K(X,Y^*)^{**}$.

cf Remarque dans Godefroy-Saphar; $K(X,Y^*)^{**} = \overline{K(X,Y^*)}^{\tau_K}$ dans $L(X,Y^*)$

Ex: [G. Pisier] Si X, Y de type 2, alors J injective

Th [Pisier] $\exists X$ e. Banach de dim infinie $X\hat{\otimes}X = X\check{\otimes}X$.   ex: L^p, $2<p<\infty$
Q: Existe-t-il un exemple réflexif?!

<u>Projections</u>: Soit X réflexif séparable. ① Si $K(X) \subsetneq Z \subset L(X)$, il n'existe pas de projection de norme 1 de Z sur $K(X)$ ② $K(X)$ est localement 1-complémenté dans Z ssi $Z \subseteq \overline{K(X)}^{\tau_K} = K(X)^{**}$

Y loc^t 1-complémenté dans Z $\Leftrightarrow$ $Y^\perp$ est le noyau de $\pi : Z^*\to Z^*$, $\|\pi\|=1$, $\pi^2=\pi$
$\Leftrightarrow$ $\forall F$ de dim finie, $F\subseteq Z$ $\exists L_F : Z\to Y$ $L_F|_{F\cap Y} = Id_{F\cap Y}$, $\|L_F\| < 1+\varepsilon$.

Le théorème repose sur les points de différentiabilité de la forme $x_0^*\otimes x_0$, $x_0\in S_X$, $x_0^*\in S_{X^*}$ de la fonction $\|\cdot\|_{L(X)}$.

Si $T\in L(X)\setminus K(X)$, $E_T = K(X)\oplus \mathbb{R}T$ et $L_{F,\varepsilon}(T) = R_{F,\varepsilon} \xrightarrow{WOT} T$.

"La limite des normes $\to$ unicité de τ_K $\to$ convergence automatique.

Grande question: $K(X)$ peut-il être réflexif?

<u>Remarque</u>: E e. Banach séparable et (S_n) suite d'opérateurs $E\to E$ tels que $\|S_n(x)-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x\in E$. Si pour des $\lambda_n \geq 0$, $\sum\lambda_n = 1$, $S = \sum \lambda_n S_n$ atteint sa norme, alors il existe une suite de comb. convexes des S_n, $C_1 < C_2 < C_3 \cdots$ telle que $\|C_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.   Ex. $B = S_E$.

Cor: Si $E = X^*$ dual sép et E a BAP, alors E a MAP: $S_n = R_n^*$, rang $(R_n) < \infty$, $R_n^* x \xrightarrow[\|\cdot\|]{} x$ pour $x\in E$ et $\sum \lambda_n R_n^*$ atteint sa norme et on a la MAP.

On peut en fait montrer AP $\Rightarrow$ MAP, mais pas par cette méthode.

Q ouverte : la propriété de Grothendieck est-elle vraie pour tout dual ?

X^* dual avec BAP $\overset{?}{\Rightarrow}$ X^* a MAP.

Si on a un contre-ex à : $|||\cdot|||$ norme éq sur $\ell_1(\mathbb{N})$ alors $(\ell_1, |||\cdot|||)$ a la MAP, on a aussi un contre-exemple à cela.

Si M métrique uniformément séparé, $\mathcal{F}(M)$ a-t-il la BAP ?

Q : Sait-on reconnaître les métriques tels que $\mathcal{F}(M)$ est un dual ?

Condition de Weaver : "a-séparation" : si on $x, y \in M$, alors il existe $f \in \mathrm{lip}_0(M)$ tel que $|f(x)-f(y)| = d(x,y)$ et $\|f\|_L \leq a-1$.

et cela ne dépend pas de a ...

$\hookrightarrow$ On le sait seulement pour $\mathcal{F}(M) = \mathrm{lip}_0(M)^*$?