Franz Lehner.

Quelques problèmes de caractérisation en probabilité libre

Déf. Un espace de probabilité non commutatif est (A, φ) avec A algèbre unifère et $\varphi : A \to \mathbb{C}$ linéaire, positif, $\varphi(1) = 1$.

Ex : $A = L^\infty(\mu)$ μ = proba $\varphi(f) = \int f d\mu$.

$(Y_i) \subseteq A$ est une famille libre (l.) si pour tous polynômes $p_1, \dots, p_n$ et tous indices $i_1, \dots, i_n$ avec $i_j \neq i_{j+1}$ avec $\varphi \circ p_j(Y_{i_j}) = 0$ on a $\varphi(p_1(Y_{i_1}) \dots p_n(Y_{i_n})) = 0$

Ex : $\varphi(Y_1 Y_2 Y_1 Y_2) = 0$ si $\varphi(Y_1) = \varphi(Y_2) = 0$.

alors qu'en proba classique $= \varphi(Y_1^2 Y_2^2) = \varphi(Y_1^2)\varphi(Y_2^2) \neq 0$.

On a un Th limite central : (X_i) l. i.d. avec $\varphi(X_i) = 0$ et $\varphi(X_i^2) = 1$,

$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d}$ loi de Wigner "semi circulaire", telle que $\varphi(S_n^k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int t^k \sqrt{4-t^2}\, dt$.

En classique, il y a plein de caractérisations de la loi gaussienne

- Caractérisations linéaires : soient (X_i) i.i.d. (classique) ou l.i.d. (libre).

Bernstein : $X_1 + X_2$ "$\perp\!\!\!\perp$ indépendant" $X_1 - X_2$ $\iff$ X_i gaussiennes

libre : libre $\iff$ X_i Wigner.

Stabilité : $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \overset{d}{\sim} X_1$ $\iff$ X_i gaussienne en classique.

$\iff$ X_i Wigner en libre.

Bercovici

Marcinkiewicz : nombre fini de cumulants $\iff$ $E e^{iXt} = e^{\text{polynôme}} \iff X_i$ gaussienne

n'a pas d'équivalent en libre.

Cramér : X_i indépdts $\sum_{i=1}^n X_i \sim$ gaussienne $\iff$ toutes gaussiennes

n'a pas d'éq en libre

<u>Darmois-Skitovich</u> : $\sum a_i X_i \perp \sum_i b_i X_i$ avec $a_i b_i \neq 0 \Leftarrow$ toutes gaussiennes

ne se généralise pas (conséquence de Marcin. + Cramér)

$\rightarrow$ Chistyakov / Goitzes.

<u>Caractérisation non linéaire</u> :

Lukacs : $L = \sum b_i X_i$, e.g. $L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$Q = \sum_i' a_{ij} X_i X_j$, e.g. $Q = \frac{1}{n}\sum (X_i - L)^2$

Si $L \perp Q$, alors les X_i sont gaussiennes

Hiwibashi
Kurado
Nagisa
Yoshida.

Par la méthode des moments (en supposant que tous les moments existent)

Mais il suffit de supposer l'$\exists$ du 2e moment $\rightarrow$ v.a. non bornées dans avN.

$(\mathcal{A}, \tau)$ alg de von Neumann finie avec $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $\tau(ab) = \tau(ba)$, $\tau(1) = 1$.

X autoadjoint est dit affilié à $\mathcal{A}$ $(X \in \tilde{\mathcal{A}})$ si $X = \int \lambda \, dE_\lambda$ avec $E_\lambda \in \mathcal{A}$.

Si X non autoadjoint, $X = U \cdot |X|$ avec $|X|$ affilié et $U \in \mathcal{A}$.

[Déf. de Nelson] Alors $\tilde{\mathcal{A}}$, les opérateurs affiliés, est une algèbre.

et $L^p(\mathcal{A}) = \{X \in \tilde{\mathcal{A}} : \tau(|X|^p) < \infty$. On a une inégalité de Hölder :

si $X \in L^p(\mathcal{A})$, $Y \in L^q(\mathcal{A})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $X \cdot Y \in L^1$ et $\tau |XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q$

<u>Lemme</u> : Si $X, Y \in L^p$ sont libres, alors $X \cdot Y \in L^p$: question d'analyse complexe. (la $\frac{\|XY\|_p}{\|X\|_p\|Y\|_p}$?)

Analogue de l'égalité classique : $\|XY\|_p = \|X\|_p \|Y\|_p$.

<u>Corollaire</u> : Si $X_1, \dots, X_s \in L^p$ sont libres et $p_1 + \dots + p_s = p+1$ avec $1 \leq p_i \in p$, p_i entiers

alors $X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_s}^{p_s} \in L^1$, où $i_j \neq i_{j+1}$.

Dem : $X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_s}^{p_s} = X_{i_1}^{p_1 - 1} \underbrace{X_{i_1} X_{i_2}}_{\in L^p} X_{i_2}^{p_2 - 1} \dots X_{i_s}$.

et donc par Hölder $\frac{p_1 - 1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{p_2 - 1}{p} + \dots + \frac{p_s}{p} = \frac{p_1 + \dots + p_s - 1}{p}$

$\Rightarrow \|X_{i_1}^{p_1} \dots X_{i_s}^{p_s}\| \leq \|X_{i_1}^{p_1 - 1}\|_{\frac{p}{p_1 - 1}} \|X_{i_1} X_{i_2}\|_p \dots \|X_{i_s}^{p_s}\|_{\frac{p}{p_s}} = \|X_{i_1}\|_p^{p_1 - 1} \|X_{i_1} X_{i_2}\|_p \dots \|X_{i_s}\|_p^{p_s} < \infty$.

On continue comme ds la preuve classique, par récurrence.

$L = \sum b_i X_i \in L^1$ libre $\Rightarrow Q \cdot L \in L^1$

$Q = \sum a_{ij} X_i X_j \in L^1$

et $Q \cdot L = \sum'_{ijk} a_{ij} X_i X_j \, b_k X_k = \sum'_i a_{ii} b_i X_i^3 + \sum'_{ij} a_{ij} b_j \underbrace{X_i X_j^2}_{\in L^1} + \sum'_{ij} a_{ij} b_j \underbrace{X_i^2 X_j}_{\in L^1}$

$+ \sum'_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} a_{ij} b_k \underbrace{\underbrace{X_i X_j}_{\in L^2} \underbrace{X_k}_{\in L^2}}_{\in L^1}$

et donc $\sum'_i a_{ii} b_i X_i^3 \in L^1$ et donc les X_i sont dans L^3.

Cela résulte du lemme : Si X, Y libres et $X + Y \in L^p$, alors $X, Y \in L^p$.

Puis on reprend la preuve combinatoire.

<u>Q ouverte.</u> Si on prend une forme cubique C et qu'on a $C \perp L$, a-t-on la m̂ conclusion ? On ne sait pas si le 3^e cumulant est nul [en classique ça ne pose pas de problème].

<u>Problème de régression</u> : X_i i.i.d., si $\mathbb{E}[\sum a_i X_i \mid \sum' b_i X_i] = 0$, qu'en déduire des X_i ?

Th (Kagan-Linnik-Rao 1973) $X_1, X_2 \sim X$ i.i.d et on peut renormaliser de sorte que $\mathbb{E}[X_1 - \alpha X_2 \mid X_1 + \beta X_2] = 0$ avec $|\beta| \leq 1$

(i) si $\alpha\beta < 0$, $X = 0$

(ii) si $\alpha\beta > 0$ et $|\beta| = 1$
- (a) si $|\alpha| \neq 1$, $X_1 = X_2 = 0$
- (b) si $\alpha = \beta = 1$, alors les X_i st arbitraires
- (c) si $\alpha = \beta = -1$, alors les X_i st symétriqt arbitraires

(iii) si $|\beta| < 1$, $\alpha\beta > 0$ et si on pose $\lambda := -\dfrac{\log|\alpha|}{\log|\beta|}$, i.e. $|\alpha| |\beta|^{\lambda} = 1$.
- (a) si $\lambda \notin]0, 1]$, alors $X = 0$
- (b) si $\lambda = 1$, les X_i st gaussiens.
- (c) si $0 < \lambda < 1$ alors X est semistable.

Def : Une loi est dite semistable si $\exists \, \beta, \gamma$ $\chi(t) = \mathbb{E} e^{iXt} = \chi(\beta t)^{\gamma}$

ex : $\chi(t) = e^{-c|t|^{\lambda}}$: alors $\chi(\beta t) = e^{-c|t|^{\lambda} |\beta|^{\lambda}} = (\chi(t))^{|\beta|^{\lambda}}$: on peut $\gamma = -|\beta|^{\lambda}$.

$E[X_1 - \alpha X_2 \mid X_1 + \beta X_2] = 0$ veut dire $E[(X_1 - \alpha X_2)\, e^{i(X_1+\beta X_2)t}] = 0$

Or $E\, X_1 e^{i(X_1+\beta X_2)t} = \frac{1}{i}\chi'(t)\cdot\chi(\beta t)$

$E\, X_2 e^{i(X_1+\beta X_2)t} = \chi(t)\,\frac{1}{i\beta}\chi'(\beta t)$

et donc $\chi'(t)\chi(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\chi(t)\chi'(\beta t) = 0$ $\qquad \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\chi'(\beta t)}{\chi(\beta t)}$

et donc $\chi(t) = \chi(\beta t)^{\alpha/\beta}$.

Le même théorème reste vrai en libre : en remplaçant Gauss par Wigner et semistable par semistable libre

Def : Une loi est semistable libre si la transformée de Voiculescu satisfait $\varphi(z) = \alpha\varphi\left(\frac{z}{\beta}\right)$: si μ est une distribution, $G_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}$ et la transformée de Cauchy, $F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)}$ inversible pour $z \to \infty$ et $F_\mu^{-1}(z) = z + \varphi_\mu(z)$ avec $\varphi_\mu(z)$ analytique dans 

Considérons $\tau\left((X_1 - \alpha X_2)(z - (X_1 + \beta X_2))^{-1}\right) = 0$

et $\tau\left(X_1 (z - (X_1 + \beta X_2))^{-1}\right) = \dots$ on utilise le théorème de subordination de Philippe Biane : si X, Y libres, $E[(z-(X+Y))^{-1} \mid X] = (\omega(z) - X)^{-1}$ avec $\omega(z)$ tel que $G_X(\omega(z)) = G_{X+Y}(z)$:

$= \tau\left(X_1 E[(z - X_1 - \beta X_2)^{-1} \mid X_1]\right)$

$= \tau\left(X_1 (\underbrace{z_1(z)}_{\text{joue le rôle de } w} - X_1)^{-1}\right) = G_{X_1+X_2}(z)\, z_1(z) - 1$

et de même pour le 2e membre et on trouve $z_1 + z_2 - z = \varphi_{X+Y}(z)$.

Il y a plein d'autres généralisations.