Hermann Pfitzner
14/5/2013

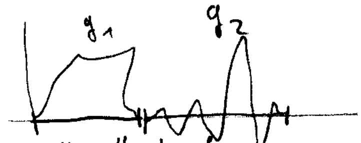
Convergence en mesure sans mesure (© Daniel Li)

Plaçons-nous dans $L^1 = (L^1[0,1], \mu) \ni g_n$, $\|g_n\| = 1$, $g_n \perp g_{n'}$ (et donc le support de la mesure tend vers 0, puisque $[0,1]$ est compact. Alors $g_n \xrightarrow{\mu} 0$ [en mesure].

Autre ex : Tchebychev : $\| \ \|$ plus fine que μ : $\|h_n\|_1 \to 0 \Rightarrow h_n \xrightarrow{\mu} 0$.

L'addition est continue pour μ. Donc si $f_n = g_n + h_n$, alors $f_n \xrightarrow{\mu} 0$

Que veut dire $g_n \perp g_{n'}$? Les g_n sont isométriquement équivalents à la base de ℓ_1.



$\|g_1\| = \|g_2\| = 1$
$\|\alpha g_1 + \beta g_2\|_1 = |\alpha| + |\beta|$.

Il suffit de supposer que $\inf \|g_n\| > 0$: alors $\|\sum_1^\infty \alpha_n \frac{g_n}{\|g_n\|_1}\| = \sum_1^\infty |\alpha_n|$ et $g_n \cong \ell^1$

Quid de f_n ? On n'aura pas $f_n \sim \ell_1$, mais $f_n \overset{\text{alm[ost]}}{\sim} \ell_1$:

$$\Big\|\sum_1^\infty \alpha_n \frac{f_n}{\|f_n\|}\Big\| \geq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \sum_{n \geq m} |\alpha_n| .$$
(= seult si $f_n \perp f_{n'}$)

"copie presque isométrique"

La réciproque vaut : une suite presque isométrique à ℓ^1 et presque disjointe
pour toute sous-suite (f_{n_k}), une autre sous-suite $(f_{n_{k_\ell}})$ et

Kadec-Pełczyński 1962 : Soit $(f_n) \subset L^1$ bornée. Il existe une perturbation (g_ℓ) : $\|f_{n_{k_\ell}} - g_\ell\|_1 \to 0$
telle que $g_n \perp g_{n'}$ si et seulement si $f_n \xrightarrow{\mu} 0$
si et seulement si $\forall (f_{n_k}) \exists (f_{n_{k_\ell}})$ $f_{n_{k_\ell}} \overset{\text{alm}}{\sim} \ell^1$ et $\|f_{n_{k_\ell}}\| \not\to 0$

Pour des raisons techniques, il faut rajouter $\inf \|f_n\| > 0$.

C'est très surprenant : cv en mesure décrite en terme de norme.
Mais ce n'est pas sorcier puisque $\mu(A) = \|1_A\|$ et que la norme est déterminée par la mesure.

Déf : Z espace de Banach, τ_μ topologie sur Z : elle est appelée « topologie de mesure abstraite » si ① (Z, τ_μ) est un espace topologique séquentiel où toute suite convergente a une limite unique ; ② $\tau_\mu \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$; ③ Si $\mathcal{O} \in \tau_\mu$, alors $x + \mathcal{O} \in \tau_\mu$ [invariance par translation] ; ④ Si $(x_n) \overset{alm}{\sim} \ell_1$, alors $x_n \xrightarrow{\tau_\mu} 0$ et si $(x_n) \xrightarrow{\tau_\mu} 0$, alors $\exists (x_{n_k})$ $(x_{n_k}) \overset{alm}{\sim} \ell^1$ ou $\|x_{n_k}\| \to 0$.

→ A est τ_μ-fermée ⟺ A séq^t τ_μ fermé

Exemple : L^1 !

<u>Th de base</u> [facile mais important] : Rappelons que X est L-facteur dans son bidual si $X^{**} = X \oplus_1 X_{s(ingular)}$, comme $X = W_*$ prédual d'une algèbre de von Neumann, $W_*^{**} = W^* \ni \varphi$ s'écrit $\varphi = \underset{\substack{\text{normal} \\ \hat{W}_*}}{\varphi_n} + \varphi_s$ et $\|\varphi\| = \|\varphi_n\| + \|\varphi_s\|$; et comme $X = L_1$ = mesures
↑ partie très désagréable

σ-additivement et L^1_s = mesures purement finiment additives ; et comme $(\ell^1)^{**} = \ell^1 \oplus c_0^\perp$; et comme $(S^1)^{**} = S^1 \oplus (S^\infty)^\perp$, et comme $H^1 \subset L^1(\mathbb{T})$; restreignons la projection $L^{1**} \twoheadrightarrow L^1$ à H^1 et vérifions qu'elle atterrisse bien ; le dual de l'algèbre du disque ; le JBW*. <u>Tout espace L-facteur dans son bidual admet une telle topologie</u>

<u>Esquisse de la preuve</u> : Posons $\mathcal{C}_0 = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ bornée : $\forall (x_{n_k})\ \exists (x_{n_{k_l}})\ x_{n_{k_l}} \overset{alm}{\sim} \ell^1$ ou $\|x_{n_{k_l}}\| \to 0\}$ "classe de convergence"

et posons $\mathcal{C} = \{(x_n) : \exists x \in X\ (x_n - x) \in \mathcal{C}_0\}$ "toutes les suites qui convergent vers un x.

Idée des années ?0, 30 :

Soit $li^* : \mathcal{C} \to X$ telle que $li^*(x_n) = x$. On définit τ_μ par : $X \supset A$ est τ_μ-fermée
(rappelle lim) et c'est bon une application !
si et seulement si A est « $\mathcal{C}$-séq^t fermé », c'est-à-dire : $(x_n) \subset A$, $(x_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow li^* x_n \in A$.

Ce qui est élém et fastidieux : la topologie est donnée par les suites convergentes.
On oublie toujours un détail !

Supposons que $x_n - x \in \mathcal{C}_0$, $x_n - y \in \mathcal{C}_0$ et montrons que $x = y$! Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_n - x \overset{alm}{\sim} \ell^1$, $x_n - y \overset{alm}{\sim} \ell_1$. Prenons $\mathcal{U}$ ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ et soit $w^*\text{-}\lim_{n \in \mathcal{U}} x_n - x = x^{**} \in X^{**}$ et $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_n - y = y^{**} \in X^{**}$. Or on sait de L-facteur que

$x^{**} \in X_s$ et $y^{**} \in X_s$ [un exemple au ??? : $X = \ell^1$, $w^*\text{-}\lim_n e_n = x^{**} \in (\ell^1)^{**} = \ell^1 \oplus_1 c_0^\perp$; or $\langle \lim_n e_n, f_m \rangle = 0$: donc $x^{**} \in c_0^\perp$; cela se généralise à tout L-facteur]

Indication : un s.e. Y L-facteur dans son bidual de X L-facteur dans son bidual, on a $Y^{**} = Y \oplus_1 Y_s$, $X^{**} = X \oplus_1 X_s$ et $Y \subset X$ et $Y_s \subset X_s$!! "Y bien disposé dans X".

$\lim_n x_n = x + x_s = y + y_s$ implique que $x = y$ et $x_s = y_s$.

Résultat principal : Th [~~Bukh~~Bukhvalov-Lozanovskii] Notons $X^{**} = X \oplus X_s$ (P).

Toute suite ~~converge~~ bornée admet des combinaisons convexes qui convergent pour la top τ_μ

Cela rappelle le th [Komlos]. Si (f_n) bornée dans L^1, alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_{n_k} \xrightarrow{p.p} f$ [et en particulier $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$]

Plus précisément, $\exists A_k \subset \mathbb{N}$ fini, $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ de somme 1 sur chaque A_k : $\sum_{n \in A_k} \lambda_n = 1$ et $y_k = \sum_{n \in A_k} \lambda_n x_n \xrightarrow{\tau_\mu} y$.

N.B. : Il y a un contre-exemple de Bernard Beauzamy et de Bernstein relative à la prop de Banach Saks : les L^p l'ont et L^1 a Banach-Saks faible. Ils ont découvert un espace réflexif qui n'a pas cette propriété. On ne peut donc pas obtenir un théorème de Komlos dans ce cadre.

Q : La topologie est-elle Hausdorff ? Mais la limite seq est unique, on ne sait pas !

Q : L'addition est-elle continue ? au moins séquentiellement ?

Komlos est un substitut à la compacité : une "compacité convexe". Dans notre résultat aussi, il est question de "compacité convexe séquentielle".

Si C est τ_μ-fermé et convexe et qu'on a "compacité convexe" au sens que (C_i) convexes τ_μ-fermés avec $\bigcap C_i = \emptyset$ alors $\exists i_1, \dots, i_n$ $\bigcap_1^n C_{i_k} \neq \emptyset$.

Applications : Points fixes. La compacité convexe s'y applique : Soit $T : C \longrightarrow C$, il y a des conditions sur T et C ... et un point fixe. Prenons une partie minimale $\tilde{C}$ par rapport aux conditions telle que $T : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}$ et $\tilde{C} \neq \emptyset$. On prend le lemme de Zorn puis un argument de compacité : $\tilde{C}$ ~~maximal~~ min non vide.

Là il suffit la compacité convexe ! : pour obtenir qu'une $\bigcap$ soit non vide, il suffit de voir qu'une $\bigcap$ de convexes le soit et il suffit que T soit τ_μ-convergente.

On peut aussi généraliser Godefroy-Kalton-Li : X L-emboîté dans L^1.
Si $Y \subset X$, X L-emboîté, comment savoir que Y l'est ? Sans regarder le bidual.
Il suffit de savoir que B_Y τ_μ-fermée. Maintenant, on sait le faire pour tout X et pas seulement $X = L^1$.

Godefroy avait défini $X^\# = \{x^* \in X^* : x^* \ \tau_\mu\text{-continu}\}$.
On a p.ex. : $(L^1)^\# = \{0\}$ et $(\ell^1)^\# = \ell^1_* = c_0$ - Il y a un cas de figure où $X^\# = X_*$.

espace reflexif : trivialement L-emboîté et la topologie devient triviale.
La topologie coïncide avec la $\|\cdot\|$ puisque ~~l'e~~ l'espace ne contient pas ℓ^1 !

Idée : considérer c_0 avec ℓ^∞ remplacé par ℓ^1 pour inclure l'étude des espaces L^1.

$L^1(\mu)$, μ sigma-finie, peut être traitée comme (Ω, τ) avec τ <u>fini</u> !!
↳ cv en mesure : $\mu(\{|f_n|>\varepsilon\} \underline{\underline{\cap E}}\}$, E de mesure finie. cf Nelson.
Cf J.L. Sauvageot : cv. p.p. dans une a vN quelconque.

Q : une top de mesure abstraite, restreinte à un sous-espace ... n'est pas néc[essairemen]t une top de mesure abstraite. Néanmoins c'est le cas dans les L-emboîté.
$Y \subset X$; $\tau_\mu|_{B_Y}$ est encore une top de mesure abstraite $\Leftarrow$ Y L-emboîté
Y L-emboîté ssi la boule unité est fermée

Komlos : lié au splitting lemma : $L^1 \ni f_n = \underset{g_n \perp g_n'}{g_n} + \underset{h_n}{h_n}$ de Rosenthal.
| "th des grands nombres" abstrait.
↳ on le sait pour les JBW*-algèbres mais pas pour les triples.