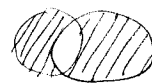


métriques « différence symétrique » en géométrie ml de Banach

Def.: Soit S un ensemble. Posons $d_S(A, B) = |A \Delta B|$



Cette définition est prise au sens de la mesure de comptage.

• On a un plongement D -Lipschitzien $(X, d_X) \xrightarrow[\text{D-Lip}]{f} (Y, d_Y)$ si

$$\forall x, y \quad d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq D d_X(x, y)$$

Th (Aharoni 1979): (M, d) separable $\xrightarrow[(\delta+\varepsilon)\text{-Lip}]{f} C_0^+$, i.e., C_0 est Lip -universelle pour les espaces separables.

Esquisses: $(\mathbb{N}, d) \xrightarrow[\text{1-Lip}]{f} \ell^\infty(\mathbb{N})$ [Fréchet, 1906]

etape 1) $(X, \|\cdot\|)$ Banach separable $\xrightarrow[\text{1-Lip}]{f} C[0,1]$ [Banach-Mazur]

etape 2) $(X, \|\cdot\|)$ avec une base $\xrightarrow[\text{1-Lip}]{f} C_0$

Q: ceci est-il optimal? Non! on peut faire 2!

Améliorations de constantes: • Assouad 1973: $(\mathbb{N}, d) \text{ sep. } \xrightarrow[(3+\varepsilon)\text{-Lip}]{f} C_0^+$ avec une preuve purement métrique.

• Pelant 1999: $(\mathbb{N}, d) \text{ sep. } \xrightarrow[\text{3-Lip}]{f} C_0^+$. C'est optimal.

• Kalton-Lancien 2008: $(\mathbb{N}, d) \text{ sep. } \xrightarrow[\text{2-Lip}]{f} C_0$ avec intro d'une propriété π . C'est optimal (Aharoni).

[En fait, $\ell_1 \xrightarrow[\text{D-Lip}]{f} C_0$, alors $D \geq 2$]. $\otimes$

Q: et pour les espaces $C(K)$?

Remarque: Si K compact infini, alors $C_0 \xrightarrow[\text{1-Lip}]{\text{linéaire}} C(K)$ (Albiac-Kalton).

Ordinaux dénombrables: identifions $\beta = \{\alpha : \alpha < \beta\} = [0, \beta[$ et posons $\beta+1 = [0, \beta]$.

$$[0, \omega] = [0, \omega \cdot 2] \leq \dots \leq [0, \omega^2] \leq \dots \leq [0, \omega^k \cdot n] \leq \dots \leq [0, \omega^\omega].$$

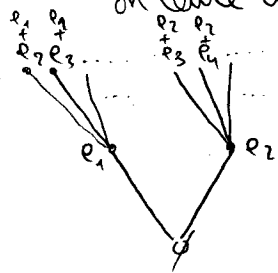
Borsuk: $C[0, \omega] \xrightarrow[\text{1-Lip}]{f} C[0, \omega \cdot 2] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow C[0, \omega^k] \hookrightarrow \dots \hookrightarrow C[0, \omega^\omega] \xrightarrow[\text{1-Lip}]{f} C[0, 1]$
 (Pour ceci, c'est en fait simplement le prolongement par 0!) (Borsuk: complémentation)
 $\uparrow$ $\uparrow$
 (M, d) $(\mathbb{N}, d)$

Note but: obtenir des bornes inférieures de distortion de $(M, d) \xrightarrow{D_k-lip} [0, w]$. (2)

Théorème: $D_k \geq \frac{k+1}{k}$. En particulier $(M, d) \xrightarrow{D_k-lip} [0, w] \Rightarrow D_k \geq 2$

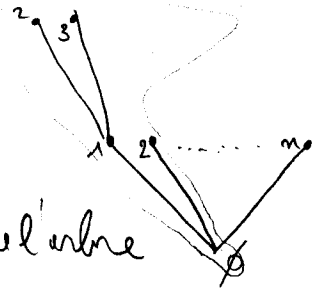
Méthode d'Aharoni pour prouver $\otimes$: $S = \{e_1 + e_i, e_2 + e_j : i, j \geq 3\}$

où (e_i) la base canonique de ℓ_1 . On a $\|e_1 + e_i - (e_2 + e_j)\|_1 = 4$ puis on tente une preuve par contradiction.



Prendre $\Delta_k = (M \leq k, d_\Delta)$

Aharoni utilise une toute petite partie de l'arbre



Pour nos preuves, des parties de plus en plus grandes de l'arbre seront nécessaires. L'arbre est muni de la distance différence symétrique.

Rappel: dérivation de Cantor-Bendixson: $K' = K \setminus \{\text{points isolés}\}$; induction transfinie: $K^{(\alpha+1)} = K^{(\alpha)'}; K^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha < \beta} K^{(\alpha)}$ si limite

ex: $K = [0, 1] : K^{(\alpha)} = [0, 1]$ pour tout α

• $K = [0, w] : K' = \{w\}; K'' = \emptyset$.

Théorème: Soit $k \geq 2$. Si $\Delta_k \xrightarrow{C_k-lip} C(K)$ avec $C_k < \frac{k}{k-1}$, alors $K^{(k-1)}$ infini

Corollaire: $\ell_1 \xrightarrow{D_k-lip} \ell_\infty$ si $D_k < 2$.

• $\ell_1 \xrightarrow{D_k-lip} C(K) \Rightarrow K^{(k)} \neq \emptyset$

Q: w est-il le premier à être p.i. universel?

lemme: $\Delta_k \xrightarrow{1-lip} \ell_1$

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto \sum_{i=1}^k e_{n_i}$$

(idée de la preuve: $k=2$ pour que 2 notations restent viables)

$f: \Delta_2 \xrightarrow{D_2-lip} C(K), d_\Delta(x, y) \leq \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq D d_\Delta(x, y)$.

On veut deux suites complètes disjointes: $x_n = 2n, y_m = 2m+1$.

Posons $\mathcal{X}_{m,n} = \{ \beta \in K : |f(x_n)(\beta) - f(x_m)(\beta)| \geq \eta \}$
 $\mathcal{Y}_{i,j} = \{ y_i, y_j \}$ et montrons que $\mathcal{X}_{m,n} \cap \mathcal{Y}_{i,j} \neq \emptyset$
 pour tout $i \neq j$ et $m \neq n$.

Considérons $\|f(\{x_n, x_m\}) - f(\{y_i, y_j\})\|_\infty \geq d_\Delta(\{x_n, x_m\}, \{y_i, y_j\}) = 4$

Donc $\exists \beta \in K \quad |f(A)(\beta) - f(B)(\beta)| \geq 4$

$$|f(x_n)(\beta) - f(x_m)(\beta)| \geq |f(A)(\beta) - f(B)(\beta)| - |f(A)(\beta) - f(x_n)(\beta)| - |f(B)(\beta) - f(x_m)(\beta)|$$

$$\geq 4 - \sum_{k=1}^2 \frac{2^{k-1}}{2^k} = \eta > 0 \text{ strictement positif si } n \in \mathbb{N}.$$

$m \neq n$.

Posons $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \text{loc} \left(\bigcup_{i \neq j} (\mathcal{X}_{m,n} \cap \mathcal{Y}_{i,j}) \right)$
 $r \mapsto (f(y_r)(\beta))_\beta$

Alors ϕ est 2D-bornée et η -séparée par définition d'ensemble.

Résultat $\mathcal{X}_{m,n}$ est infini pour tout $m \neq n$. Or $\mathcal{X}_{m,n} \subset K$: il contient donc un point d'accumulation. Par continuité, $\forall n \neq m \quad K' \cap \mathcal{X}_{m,n} \neq \emptyset$.

Puis on réitère : on montre que K' est infini !

Q : $C[0, \omega^\omega]$ est-il p.c. voire complet universel ?
 en fait, non, c'est faux... ! cf Godel-Hay-Kalton.

Conclusion : 2 optimal pour les $C(K)$, K -dénombrables.

arbre bien fondé, mais de hauteur finie,
 vous l'arbre de toute la suite finie d'entiers.