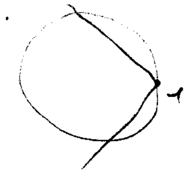
Florence Lancien
28/5/13

Le calcul fonctionnel pour les opérateurs de Ritt.

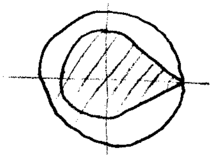
→ lié aux opérateurs sectoriels : stratégie : établir un dictionnaire entre les deux.

<u>Déf.</u> : X Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de Ritt si $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et $\{(\lambda-1)R(\lambda,T) : |\lambda|>1\}$ est borné : le spectre ne peut s'approcher que de 1



<u>Caractérisation</u> : $\{T^n, n(T^n - T^{n-1}), n \geq 0\}$ est borné

c'est assez ancien et utilise des intégrales de résolvantes.

Considérons un domaine de Stolz : $B_\alpha = \mathrm{conv}(1, D(0, \sin\alpha)) =$ 

<u>Prop.</u> : T est Ritt ssi $\exists \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $\sigma(T) \subset B_\alpha$ et $\{(\lambda-1)R(\lambda,T) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\alpha}\}$ est borné

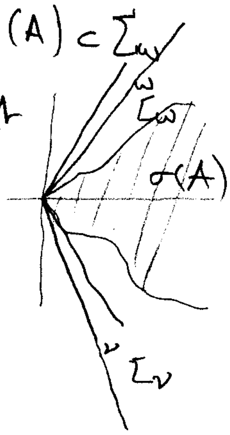
<u>Déf.</u> : ∘ T est polynomialement borné si $\exists K>0$ $\forall P$ polynôme $\|P(T)\| \leq K \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |P(z)|$

∘ T a un calcul $H^\infty(B_\gamma)$ - borné si ———— $\leq K \sup_{z \in B_\gamma} |P(z)|$

Q : Existe-t-il des opérateurs de Ritt ayant un calcul fonctionnel et pas l'autre ?

Lien avec les opérateurs sectoriels :

<u>Déf.</u> : Soit $A : \underset{\text{dense}}{D(A) \subset} X \longrightarrow X$ fermé. A est <u>sectoriel</u> si $\exists \omega \in]0,\pi[$ $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$ et $\forall \nu \in]\omega, \pi[$ $\{\lambda R(\lambda, A) : \lambda \notin \overline{\Sigma_\nu}\}$ est borné. L'inf de tels ω est <u>l'angle de sectorialité de A</u>.



N.B. : Si T est Ritt, $A = I - T$ est sectoriel.

Exemple : considérons un semigroupe continu sur $L^p(X)$: $\begin{cases} u' + Au = f \\ u(0) = 0 \end{cases}$

a comme sol. : $u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds$ et (e^{-tA}) est un sg analytique borné ssi A est sectoriel d'angle $\omega < \frac{\pi}{2}$.

<u>Sur $\ell^p(X)$</u> : $\begin{cases} u_{n+1} - Tu_n = f \\ u_0 = 0 \end{cases}$ a comme sol. : $u_n = \sum_{j=0}^{\infty} T^j f_{n-j}$ et (T^n) est un sg analytique discret ssi T est un op. de Ritt.

Il y a des versions "régulier maximal" ⟺ "R-sectoriel" et "R-Ritt".

Calcul fonctionnel H^∞ : - pour les opérateurs sectoriels et A secteur d'angle ω.

Def : A a un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma'_\phi)$ borné si $\exists K>0$ $\forall F$ fraction rationnelle de degré ≤ 0 sans pôle dans Σ_ϕ on a $\|F(A)\| \leq K \sup\{|F(z)| : z \in \Sigma'_\phi\}$

(on aurait pu poser : $F(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Sigma_\nu} F(z) R(z,A)\, dz$ avec $F \in H_0^\infty(\Sigma_\mu)$)
$\in \mathcal{L}(X)$

Q : quel lien entre sectorialité, calcul fonctionnel. Y a-t-il un lien entre les deux angles ? ϕ et ω.

Def : A est à puissances imaginaires bornées si $\exists K>0$ $\|A^{is}\| \leq K e^{\vartheta|s|}$: on note $A \in BIP(\vartheta)$ $\rightarrow F(z) = z^{is}$.

Th (McIntosh 1986) : Sur H e. Hilbert, si A sectoriel d'angle ω et $BIP(\vartheta)$, alors A a un calcul $H^\infty(\Sigma'_\phi)$ borné pour tout $\phi > \omega$
ϑ quelconque

Q : cela caractérise-t-il les Hilbert ?

Th (Cowling, Doust, McI, Yagi, 96) Sur L^p, A sect(ω) et $Bip(\vartheta)$ pour $\vartheta > \omega$, alors A $H^\infty(\Sigma'_\varphi)$ pour tout $\varphi > \vartheta$

Th (Kalton '03) : Il existe A sectoriel d'angle 0 sur un espace de Banach X et tel que A a $H^\infty(\Sigma'_\phi)$ pour tout $\phi > \vartheta$ et $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour aucun $\phi < \vartheta$.

Pour les opérateurs de Ritt : Th (Le Merdy 2011). Sur H espace de Hilbert et T op. Ritt, T a $H^\infty(B_\gamma)$ pour un $\gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ssi T est polynom^t borné.

Th Sur X Banach et T Ritt, T a $H^\infty(B_\gamma)$ pour un $\gamma \in]0,\frac{\pi}{2}[$ ssi $(I-T)$ a $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour un $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

N.B. Dans un sens, on perd sur l'angle ($\Leftarrow$).

Résultat : Il existe T op. de Ritt polynom^t borné sans calcul fonctionnel $H^\infty(B_\gamma)$ pour aucun $\gamma < \pi$.

Commençons par exposer l'exemple de Kalton : $Af(x) = e^x f(x)$ sur $L^2(\mathbb{R})$. On pose $\|f\|_\vartheta = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\vartheta|\xi|} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$: alors $\|f\|_\vartheta \leq \|f\|_0 = \|f\|_{L_2}$. Soit H_ϑ le complété de L^2 pour $\|\cdot\|_\vartheta$. C'est un Hilbert !

Sur H_ϑ, A sectoriel d'angle ϑ et $\|A^{is}\| = e^{\vartheta|s|}$: $BIP(\vartheta)$, et donc, par McI, A a $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour $\phi > \vartheta$

L'op est facile : A^{is} revient juste à un opérateur de translation et $F(A)f(x) = F(e^x)f(x)$.

Soit X_ϑ complété pour $\|f\|_{X_\vartheta} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \|f \mathbb{1}_{]-\infty, a[}\|_\vartheta$ sur X_ϑ :

A est sectoriel d'angle 0, $\|A^{is}\| = e^{\vartheta|s|}$; A a un calcul $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour tout $\phi > \vartheta$, mais pas $H^\infty(\Sigma_\phi)$ si $\phi < \vartheta$.

idées : • $\|f \mathbb{1}_{]-\infty,a[}\|$ ne fait qu'améliorer la norme des opérateurs de multiplication.

$\|f \longmapsto mf\|_{\mathcal{L}(X_\vartheta)} \leq \| \cdots \|_{\mathcal{L}(H_\vartheta)}$

• mais cela n'améliore pas BIP.

Remarque : A a aussi $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour $\phi = \vartheta$. En fait, $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour tout $\phi > \vartheta$ et $\|A^{is}\| \leq e^{\vartheta|s|}$ implique $H^\infty(\Sigma_\vartheta)$. On va l'appliquer pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.
(en considérant $\log A$)
ça ne marche plus si on accepte une constante : on ne contrôle plus $W(A)$!

Construction de l'opérateur de Ritt : Sur $L^2(\mathbb{R}^+)$, soit $Bf(x) = e^{-x}f(x)$ et construisons H_ϑ^+ et X_ϑ^+ complété pour $\| \|_\vartheta$ et $\| \|_{X_\vartheta}$.

Alors B sera sectoriel d'angle 0 et $\|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X_\vartheta^+)} = e^{\vartheta|s|}$ et B a $H^\infty(\Sigma_\phi)$ pour $\phi > \vartheta$.
De plus, $\sigma(B) \subseteq [0,1]$.

Prenons $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $X = X^+_{\frac{\pi}{2}}$, $T = (1-B)(1+B)^{-1}$: alors $z \longmapsto \frac{1-z}{1+z}$ envoie $\Sigma_{\pi/2}$ sur $\mathbb{D}$ et $[0,1]$ sur lui-même ; sur $X^+_{\pi/2}$, T est Ritt, T est polynomialement borné et T n'a $H^\infty(B_\gamma)$ pour aucun $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

Dem. : • si $\lambda = \frac{1-z}{1+z}$, $(\lambda - 1)(\lambda - T)^{-1} = z(z+B)^{-1}(I+B)$ et si $|\lambda| > 1$, $z \in \overline{\Sigma_{\pi/2}}$,

$\underbrace{z(z+B)^{-1}(1+B)}_{\| \; \| \leq C \text{ car } B \text{ sectoriel d'angle } \frac{\pi}{2}}$.

• Si $P(T) = F(B)$ où $F(z) = P\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$, B a un calcul $H^\infty(\Sigma_{\pi/2})$ borné et T est polynomialement borné.

• $1 - T = 2B(1+B)^{-1}$: $\sigma(I+B) \subset [1,2]$ et $I+B$ a $H^\infty(\Sigma_{\vartheta'})$ pour $\vartheta' > 0$ et $1+B$ a $BIP(\vartheta')$ pour $\vartheta' > 0$

Si $(I-T)$ avait $BIP(\alpha)$ avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on aurait B avec $BIP(\alpha+\vartheta')$ où on pourrait rendre $\alpha + \vartheta' < \frac{\pi}{2}$. Or $\|B^{is}\| = e^{\frac{\pi}{2}s}$!!

Remarque : Si on étudie R-Ritt, les choses marchent beaucoup mieux ! cf Christian Le Merdy. Donc cet opérateur est Ritt sans être R-Ritt !

Remarque : si on écrit $A^{is} = e^{isU}$, $\pm iU - \vartheta$: $W(U) \subset \{|\mathrm{Im}| < \vartheta\}$

Donc U (ici, sur un Hilbert) a un c.f. sur cette bande et A a c.f sur le secteur d'angle ϑ.

→ Baillon-Crouzeix : lien entre σ et W assez profond.

Idem : $\|T^n\| \leq 1$ pour tout n ⇒ polyn. borné ... extension de l'≤ de vN

On peut aussi interpoler X_ϑ avec L_2 pour obtenir un espace plus "rond", superreflexif

Les op. de convolution : construits par "moyennes" et donc R-qqch.