

Géométrie des états tripartites et de l'information quantique

États : d'intéraction

1) Intro sur l'intéraction et l'info Q ; rapports avec la géométrie.

Qbit: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ = état de superposition dans $\mathbb{C}^2$; on suppose $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ pour qu'il s'agisse de probas.

ex: H  $|\psi\rangle$
 $|0\rangle$ stable i.e. niveaux d'énergie
 $|1\rangle$ instable

ou les σ : polarisation du photon

- spin de l'électron : mais qu'est-ce que c'est? Juste une variable ^{quantité} q qui n'apparaît qu'à la mesure : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Il y a donc : principe de superposition, notion de mesure, l'évolution unitaire.

x "top d'info" $\downarrow$ "info projetée" = perte d'info.

Système à 2 qubits: A, B 2 particule : $|\psi_{AB}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle + \gamma|01\rangle + \delta|11\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$

$$\in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Considérons 2 états possibles : $|\psi_1\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$
 $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Ces deux états ne sont pas équivalents : $|\psi_1\rangle$ mesuré en A donne $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ mais on ne sait rien sur la partie B.
 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ projeté sur $\mathcal{H}_B$
 Par contre si on mesure $|\psi_2\rangle$ en A ; on cela donne $|0\rangle$, ou sait que la mesure a projeté $|\psi_2\rangle$ sur $|00\rangle$.

(C'est à la base du paradoxe EPR - Podolsky - Rosen 1934)

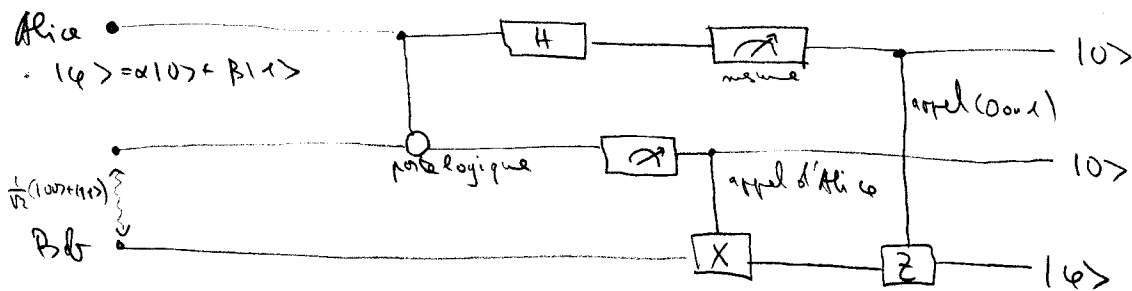
de l'inégalité de Bell (1964)

de l'expérience d'Aspect (1980)

Néanmoins certains continuent à chercher une formulation déterministe.

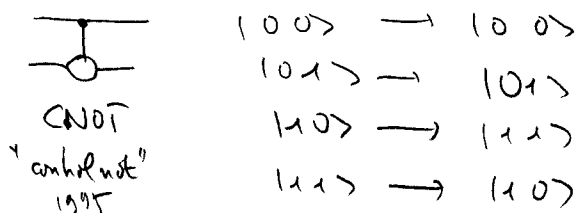
Mais auj. on privilégie le point de vue de non-localité

Phénomène de téléportation d'un état quantique



réalisation avec des photons
 X et Z : polariseurs
 porte logique :
 cablot avec des
 lames réfléchissantes

unitaires: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



aussi un unitaire, mais agit
 sur les deux bits du produit tensoriel.

Dans la mesure, on cela donne 10, les 2^e et 3^e terme sont liés.

$\left[\text{mesure du 1^{er} bit} = |1\rangle \right]$

$$\begin{aligned} & (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle \\ & \downarrow \text{CNOT} \\ & \alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle \\ & \downarrow H \\ & \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |00\rangle + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |11\rangle \\ & + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |10\rangle + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |01\rangle \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|001\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|101\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \\ & \downarrow Z \\ & |10\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \end{aligned}$$

Troublant au niveau de la physique : deux appels ont fourni 2 bits classiques, et pourtant 2 nombres complexes α, β ont été transmis.

Que s'est-il passé en géométrie? $|u_1\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$
 $|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Notons que $\det \varphi_1 = 0$ et $\det \varphi_2 \neq 0$!

Considérons $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n = M_n(\mathbb{C})$. Regardons-le en projectif: $P^{n^2-1} = P(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$
 $= P(M_{n \times n}(\mathbb{C}))$

On on a un plongement, dit de Segre : $\text{Seg} : \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n^2-1}$
 $([u], [v]) \longmapsto [u \otimes v]$.

identification $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{n^2-1}$. Elle est invariante sous $SL_n(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C})$.

C'est l'orbite linéaire de $\mathbb{P}^{n-1}$ sous G dite "orbite de plus haut poids"

$$\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\text{matrice de rang } 1) = \text{vecteur ligne} \times \text{vecteur colonne}.$$

$$\text{i.e., } \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\text{états non intriqués})$$

Variétés auxiliaires :

- la variété des sécants : $X \subset \mathbb{P}V$ $\sigma(X) = \bigcup_{x,y \in X} \mathbb{P}_{xy}^1$ 

$$\text{ou } \sigma_2(X) = \bigcup_{x,y,z \in X} \mathbb{P}_{xyz}^2$$

Si X est G -invariant, $\sigma(X)$ l'est aussi.

$$\sigma(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{P}(\text{matrice de rang } \leq 2).$$

Ainsi, ici, on stratifie les matrices selon le rang.

Si $X \subset \mathbb{P}V$ est une variété lisse, la variété duale de X est $X^\vee = \{H \in \mathbb{P}V^* : \exists x \in X, T_x X \subset H\}$

$$(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})^\vee = ?$$

Si $x \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$, $x = e_1 \otimes e_1^* = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$



et considérons $x(t) = e_1(t) \otimes e_1^*(t) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$

$$x'(t) = e_1'(t) \otimes e_1^*(t) + e_1(t) \otimes e_1^{*'}(t).$$

$$x'(0) = u \otimes e_1^* + e_1 \otimes v$$

$$\text{de sorte que } \bigcap_{x \in X} T_x \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$H \supset T_x \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} : H = \left(\begin{pmatrix} 0 & \overline{0} \\ & * \end{pmatrix} \right) \text{ rg } H \leq n-1$$

et : $\text{ob } H = 0$.

Revenons aux données : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \dots \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^3$
 $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \text{états intriqués}$

$$\text{et } \mathbb{P}^3 = X^\vee = \text{états intriqués}.$$

Pour 3 particules: actions finies
 ≥ 4 : action infinie mais « tame »

Q: le spin = exp de Stern-Gerlach:

R: physique et math se confondent.

La notion de Qbit: édaire Bell

Systèmes à 3 qubits: intrication et système tripartite

≙ Théorie de Dicke, Vidal, Cirac

th (2000 citations!) Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Sous l'action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, il existe deux états totalement intriqués non équivalents dont des représentants sont

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle + |111\rangle)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$

et trois états partiellement intriqués: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes (|10\rangle + |11\rangle), (|00\rangle + |11\rangle)|0\rangle, |00\rangle + |110\rangle$.

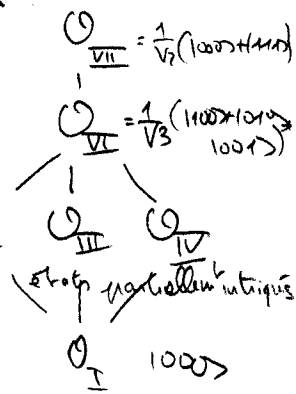
Rappel: LOCC = local operation with classical communication.

$$= U_1 \times U_2 \times U_3 \text{ (agissant séparément sur chacune des copies)}$$

SL(2, $\mathbb{C}$) = Stochastic local ops...

$$= GL_2 \times GL_2 \times GL_2 \rightarrow \text{on modifie les probabilités sans modifier la structure}$$

→ Sous $G = GL_2 \times GL_2 \times GL_2$, il existe 7 orbites de $\mathcal{H}$:



1881 Le Pappé classifie les formes trilinéaires binaires en $SL_2 \times SL_2 \times SL_2$:

$$f = \sum_{0 \leq i, j, k \leq 1} a_{ijk} x_i y_j z_k, \quad f \text{ "polynôme covariant"}$$

est invariant par une certaine forme.

1840: Cayley définit l'hyperdeterminant de format $2 \times 2 \times 2$. $\{D=0\}$ est $GL_2 \times GL_2 \times GL_2$ -invariant. $\hookrightarrow$ composantes de polynôme covariant.

Début 20^e (Segre, géomètres italiens): $P^1 \times P^1 \times P^1 \subset \mathbb{P}(P^1 \times P^1 \times P^1) \subset \mathbb{P}^7$
 dualité $D=0$: variété de tangente canon.

Théorie des invariants : appliquée aux multimatrices : $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$; $A \in \mathcal{H}$,

$A = \text{multimatrice } (a_{ijk}) \mapsto f = \sum_{0 \leq i,j,k \leq 1} a_{ijk} x_i y_j z_k$. On veut que $A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B)$
pour tout $f \in \text{Cor} =$

L'algèbre Cor est multi-gradée par les multi-degrés et

$$\text{Cor}_{1,0,0,0} = \text{Inv}_f.$$

$[S_3] \otimes [V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*]$
 $\uparrow \quad \uparrow$
Si on dit que l'homogénéité sur les coefficients.

1) Algorithme : Le Cayley - Omega process : $(f, g)_{i_1, \dots, i_k} = \text{tr } \Omega_{i_1} \Omega_{i_2} \dots \Omega_{i_k} f(x') \otimes g(x'')$
où $f, g \in \text{Cor}$ et $\Omega_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix}$ où $\text{tr } x', x'' \rightarrow x$.

$$\begin{aligned} \bullet \bullet \quad (f, f)_{\substack{0,1,1 \\ x,y,z}} &= \text{tr } \Omega_y \Omega_z f(x', y', z') \otimes f(x'', y'', z'') \\ &= \text{tr } \Omega_y \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_0} & \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \text{tr } \Omega_y \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} \otimes \frac{\partial f}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1} \otimes \frac{\partial f}{\partial z_0} \right) \\ &= \text{tr } \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial z_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial z_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_1} \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial z_0} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial z_0} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il y a encore à calculer $(f, f)_{1,0,1}$, $(f, f)_{1,1,0}$, $(f, f)_{1,0,0}$, Δ
degré 2, degré 3, degré 4.

Le Paige ... l'algorithme qui permet de calculer les générateurs de Cor à partir de f et les transvectants

Avec les ordinations, on peut étudier $\begin{cases} 2 \times 2 \times n \\ 2 \times 3 \times 3 \\ 3 \times 3 \times 3 \end{cases}$ # fini d'orbites ; structure explicite
structure très similaires : $\begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 2 : 170 \text{ générateurs avec énormément de relations} \end{cases}$
fini d'orbites ;

3) Géométrie des variétés auxiliaires :

Rappel : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$

{courbes de rang 1} et $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^7$

$\sigma(X) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}^1$ et on s'attend à ce que $\dim = 2 \dim X + 1$.

Si c'est le cas, alors il existe $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{O}(X)$, "variété des tangentes" de codim 1

th (F. Zak) : $Y \subset X$, $J(X, Y) = \bigcup_{\substack{Y \rightarrow X \\ \dim Y = 1}} \mathbb{P}^1$, si $\dim J(X, Y) = \dim X + \dim Y + 1$
alors il existe $T(Y/X) \subset J(X, Y)$
codim 1

Prenons $y(t) = (10t+11) \otimes (10t+11) \otimes (10t+11)$

Soit $x = 1000$: alors $\frac{y(t) - x}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} (1000 + 1010 + 1000)$

Le premier de rang 3 obtenu comme limite de tenseurs de rang 2.

De plus $x + y(t)$ est un état GHZ

Comment peut-on mesurer l'intrication ... la géométrie des états...

4) Atlas de l'intrication (avec J.G. Luque & J.Y. Thibon)

Construire des algo à partir des covariants pour distinguer les états non équivalents
c'est construire des variétés algébriques qui représentent ce état.

Nous avons traité les états $2 \times 2 \times 4$ / $2 \times 3 \times 3$ complètement (cf. transparents).

$2 \times 2 \times 2 (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} : \# 4 \text{ orbites infini} : \Phi[\mathbb{A}^9] = \mathbb{C}[B, L, \Lambda, D]$
deg 2 deg 4 deg 6

Imposons $B=L=\Lambda=D=0$ on obtient le sous-variété $\mathcal{W}^{11} \subset \mathbb{P}^{15}$

Imposons $L=\Lambda=0$ [pourquoi? on a $\mathcal{O}_3(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^{15}$]

Il y a une étoile d'orbites. L'algorithme en donne certains, mais nous en connaissons que l'algore voit pas. Il apparaît quand on ajoute à l'algo l'invariant qu'est l'hyperdeterminant.
C'est la géométrie qui nous permet de faire ces choix.

Q: Les schémas peuvent-ils être qcd?



3 fermions à 6 états : $\mathbb{P}(A^3 \mathbb{C}^6) \supset G(3, 6)$ D_4 ... algèbres de Lie.
3 bosons à 2 états : $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2) \supset \mathcal{U}_3(\mathbb{A}^1)$ E_6