Mesure spectrale du processus de Jacobi libre associée à une seule projection

Tarek Hamdi

(en collaboration avec N. Demni)

01 juillet 2013

Le plan

1. Espace de Probas NC et liberté.
    - Algèbre de von Neumann, état et facteurs II_1.
    - Liberté et liberté asymptotique.
    - MB unitaire libre.
2. Processus de Jacobi libre.
    - Définition
    - Construction via le processus matriciel.
3. Mesure spectrale .
    - Loi stationnaire.
    - Cas dynamique.
4. Position générale de deux projections.

Espace de probabilité non-commutatif et liberté

Bicommutant

- $\mathscr{H}$: espace de Hilbert complexe séparable.
- $S \subset B(\mathscr{H})$ non vide.

Définition

- *Le commutant de S dans $B(\mathscr{H})$ est*

$$S' := \{a \in B(\mathscr{H}) : as = sa, \forall s \in S\}.$$

- *Le bicommutant de S dans $B(\mathscr{H})$ est $S'' = (S')'$.*
- *On définit par récurrence*

$$S^{(k+1)} = \left(S^{(k)}\right)', \quad k \geq 1.$$

Algèbre de von Neumann

Remarque

1. $$S \subset S''.$$
2. $$S^{(k)} = S^{(k+2)}, \quad k \geq 1.$$

Définition

Une $\star$-sous-algèbre unitaire $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ est de von Neumann si $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$.

Facteur II_1

Définition

Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est trivial.

Définition

Un facteur $\mathscr{A}$ est du type II_1 s'il est de dimension infinie et tel qu'il admet une (unique) forme linéaire ϕ traciale :

$$\phi(ab) = \phi(ba), \quad a, b \in \mathscr{A}.$$

Exemple

- $\mathbb{F}_N$: groupe libre à N générateurs.
- $\{\delta_g, g \in \mathbb{F}_N\}$: Base (canonique) de $l_2(\mathbb{F}_N)$, muni du produit scalaire
$$< \delta_g, \delta_h >= 1_{\{g=h\}}.$$
- Les opérateurs de convolution
$$L_g : l_2(\mathbb{F}_N) \to l_2(\mathbb{F}_N),\ \ \delta_h \mapsto \delta_{gh}$$
sont unitaires.

$\{L_g, g \in \mathbb{F}_N\}''$, *muni de la forme* $\phi =< .\delta_e, \delta_e >$, *est un facteur* II_1.

Espace de probabilités non-commutatif

Définition

- *Un espace de probabilités non-commutatif (e.p.n.c.) est la donnée de*
  1. $\mathscr{A}$ *: algèbre de von Neumann.*
  2. $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *linéaire normale (état).*
- *Si* $(\mathscr{A}, \phi)$ *est un facteur du type* II_1*, on parle de* $W^\star$*-e.p.n.c.*

Exemple : $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ muni de l'espérance est un e.p.n.c. (commutatif).

- $(\mathscr{A}, \phi)$: facteur II_1.
- $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ des $\star$-sous-algèbres de $\mathscr{A}$.

Définition (Voiculescu, 1983)

$(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ *$\star$-libre si*
$\forall k \in I, \forall a_1, \ldots, a_k$ *tq* $a_j \in \mathscr{A}_{i_j}, i_k \neq i_{k+1}$ *et* $\phi(a_j) = 0$:

$$\phi(a_1^{\epsilon_1} \ldots a_k^{\epsilon_k}) = 0, \quad \epsilon \in \{1, \star\}.$$

Remarque

$a_1, \ldots, a_k$ *sont libres dans* $\mathscr{A}$ *s'ils engendrent des algèbres $\star$-libres.*

- $(\Omega, \mathbb{P})$: espace de probabilités :

$$\mathscr{A}_n = \bigcap_{p>0} L^p(\Omega, \mathbb{P}) \otimes \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

muni de

$$\phi_n = \mathbb{E} \otimes Tr_n, \quad Tr_n = \frac{1}{n} tr.$$

Définition

$(X_t(n))_t \in (\mathscr{A}_n, \phi_n)$ est assymptotiquement $\star$-libre si

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(X_{t_1}(n)^{\epsilon_1} \dots X_{t_k}(n)^{\epsilon_k}) = \phi(X_{t_1}^{\epsilon_1} \dots X_{t_k}^{\epsilon_k})$$

où $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ sont $\star$-libres dans $(\mathscr{A}, \phi)$.

Exemple (Hiai et Petz)

1. $(U_t(n))_t$: Matrices unitaires indépendantes tq
   - $$V(n)U_t(n)V^\star(n) \stackrel{L}{=} U_t(n), \quad V(n) \in \mathscr{U}_n$$
   - $\lim_{n\to\infty} \phi_n(U_t^k(n))$ existe.
2. Famille de matrice $(D_t(n))_t$ tq
   - $$\sup_n \|D_t(n)\| < \infty$$
   - $\lim_{n\to\infty} \phi_n(D_t^k(n))$ existe.

$\{(U_t(n))_t\}, \quad \{(D_t(n))_t\}$ sont asympt. $\star$-libres.

Mouvement Brownien unitaire libre

La Σ-transformé

- ν : mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$
- La ψ-fonction de ν :

$$\psi_\nu(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z\xi}{1 - z\xi} d\nu(\xi).$$

- Si $\int_{\mathbb{T}} \xi d\nu(\xi) \neq 0$: La fonction $\widetilde{\chi}_\nu =$ l'inverse de $\frac{\psi_\nu}{1+\psi_\nu}$.
- La Σ-transformé :

$$\Sigma_\nu(z) = \frac{1}{z}\widetilde{\chi}_\nu(z).$$

MB unitaire libre

Proposition (Bercovici et Voiculescu, 1992)

Il existe une famille de measure de probabilité $(\nu_t)_{t\geq 0}$ *sur le cercle unité* $\mathbb{T}$ *telle que* $\Sigma_{\nu_t}(z) = e^{\frac{t}{2}\frac{1+z}{1-z}}$.

Définition (Biane, 1997)

Le MB unitaire libre sur $\mathscr{A}$ *est une famille* $(Y_t)_t$ *d'opérateurs unitaires de* $\mathscr{A}$ *telle que*

1. $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, *la famille* $(Y_{t_1}, Y_{t_2}Y_{t_1}^{-1}, \ldots, Y_{t_n}Y_{t_{n-1}}^{-1})$ *est libre.*
2. $\forall s < t,\ Y_tY_s^{-1}$ *est distribué suivant* ν_{t-s}.

Autre définition

- $(Y_t(n))_{t\geq 0}$: $n \times n$ MB sur le groupe unitaire $\mathscr{U}_n$.

Proposition (Biane)

$$\lim_{n\to\infty} \phi(Y_{t/n}(n)^k) = \frac{e^{-kt/2}}{k} L_{k-1}^{(1)}(kt), \quad k \geq 1.$$

Corollaire

$\left(Y_{t/n}(n)\right)_{t\geq 0}$ converge au sens des moments non commutatifs qd $n \to \infty$ vers le MB unitaire libre.

Processus de Jacobi libre

Processus de Jacobi libre

- $(\mathscr{A}, \phi)$: facteur II_1.
- $\lambda > 0,\ \theta \in]0, 1]$ tel que $\lambda\theta \in]0, 1]$.
- P, Q deux projecteurs orthogonaux tels que
  1. $\phi(P) = \lambda\theta,\ \phi(Q) = \theta$.
  2. $PQ = QP = P$ si $\lambda \leq 1$ et $PQ = QP = Q$ sinon.
- Y : MB unitaire libre.
- $\{Y, Y^*\}, \quad \{P, Q\}$ sont libres dans $(\mathscr{A}, \phi)$.

Définition

Définition

Le processus de Jacobi libre de paramètres (λ, θ) *est une famille* $(J_t)_t$ *d'opérateurs auto-adjoints de* $P\mathscr{A}P$ *défini par*

$$J_t \triangleq P\left(Y_t Q Y_t^{\star}\right) P.$$

- $(Y_t)_{t\geq 0}$: $n \times n$ MB sur le groupe unitaire $\mathscr{U}_n$.
- P, Q : Projections orthogonales de rangs r et s.
- $X_t := PY_tQ$: coin supérieur de Y_t de taille $r \times s$.

Définition (Y. Doumerc)

Le processus de Jacobi matriciel (complexe) est défini par :

$$J_t := X_t X_t^\star \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C}).$$

Proposition

Le processus

$$\Big(P(n)\, Y_{t/n} Q(n) Y^{\star}_{t/n}\, P(n)\Big)_{t\geq 0} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$$

converge au sens des moments non commutatifs qd $n \to \infty$ *vers*

$$(P\, Y_t Q Y_t^{\star}\, P)_{t\geq 0}$$

où $\{P, Q\}$ *et* Y *sont* $\star$*-libres.*

Description de la mesure spectrale

Loi stationnaire

- $\phi(Y_t^k) \to \delta_{0,k}\,,\ \ t \to \infty.$
- $U \in \mathscr{A}$ unitaire de Haar :

$$\phi(U^k) \to \delta_{0,k}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Loi stationnaire de $J =$ mesure spectrale de $P(UQU^\star)P$.
- Calcul de la loi : Convolution multiplicative libre des mesures de P et de $UQU^\star$.

$$\mu(dx) = \max(0, 1 - l)\delta_0 + \max(0, 1 - k)\delta_1 + \frac{\sqrt{(r_+ - x)(x - r_-)}}{2\lambda\theta\pi x(1 - x)} 1_{[r_-, r_+]} dx$$

avec

$$l = 1/\lambda, k = (1 - \theta)/(\lambda\theta)$$

$$r_\pm = \left(\sqrt{\theta(1 - \lambda\theta)} \pm \sqrt{\lambda\theta(1 - \theta)^2}\right)^2.$$

Cas dynamique

Théorème (F. Benyach-Goerges et T. Lévy, 2011)

Soit $n \geq 1$ *et*

$$f_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}, t) := e^{nt}\phi(a_1 Y_t a_2 Y_t^* \ldots a_{2n-1} Y_t a_{2n} Y_t^*)$$

où $\{a_1, \ldots, a_{2n}\} \in \mathscr{A}$ *est* $\star$*-libre avec* Y *et* $f_0(A, t) := \phi(A)$ *pour tout* $A \in \mathscr{A}$ *alors*

$$\partial_t f_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}, t) =$$

$$- \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq 2n \\ l-k \equiv 0[2]}} f_{2n-(l-k)}(a_1, \ldots, a_k, a_{l+1}, \ldots, a_{2n}, t) f_{l-k}(a_{k+1}, \ldots, a_l, t)$$

$$+ e^t \sum_{\substack{1 \leq k < l \leq 2n \\ l-k-1 \equiv 0[2]}} f_{2n-(l-k)-1}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{2n}, t)$$

$$f_{l-k-1}(a_l a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{l-1}, t)$$

$$m_n(t) \triangleq \phi(J_t^n)/\phi(P), \ n \geq 1, \ m_0(t) = 1.$$

Proposition

$$\begin{aligned}\partial_t m_n(t) &= -n m_n(t) + \theta n m_{n-1}(t) \\ &\quad + \lambda \theta n \sum_{k=0}^{n-2} m_{n-k-1}(t)(m_k(t) - m_{k+1}(t))\end{aligned}$$

$m_n(0) = \phi((PQ)^n)/\phi(P)$.

Fonction génératrice des moments

De façon équivalente,

Proposition

La fonction génératrice des moments

$$M_t(z) = \sum_{n \geq 0} m_n(t) z^n \quad |z| < 1,$$

satisfait l'e.d.p.

$$\partial_t M_t = -z\partial_z \left\{[(1 - 2\lambda\theta) - \theta(1 - \lambda)]M_t + \lambda\theta(1 - z)[M_t]^2\right\}$$

$M_0(z) = \frac{1}{1-z}$.

$$\phi(P) = \phi(Q) = 1/2$$

- EDP

$$\partial_t M_t = -\frac{z}{2}\partial_z \left\{(1-z)[M_t]^2\right\}, \; M_0(z) = \frac{1}{1-z}.$$

- Notation :

$$\rho_t(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} L^1_{k-1}(kt) z^k, \; |z| < 1,$$

où L^1_k désigne le k-ème polynôme de Laguerre.

Résolution

Proposition (Demni-Hamdi-Hmidi, 2012)

$$M_t(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left\{1 + 2\rho_{2t}\left(\frac{ze^{-t}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right)\right\}, \; |z| < 1$$

Preuve :

ρ_t est l'unique solution de

$$\partial_t \rho_t + \frac{z}{2}\partial_z \rho_t^2 = 0, \quad w_0(z) = \frac{z}{1-z}.$$

dans la classe des fonctions analytiques au voisinage de l'origine (E. M. Rains, 1997).

Corollaire

Pour tout $n \geq 1$ *et* $t \geq 0$

$$m_n(t) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\frac{1}{k}L_{k-1}^{1}(2kt)e^{-kt}.$$

Corollaire

La mesure spectrale de J_t *dans* $P\mathscr{A}P$ *coincide avec celle de*

$$\frac{1}{4}[Y_{2t}^{-1} + 2 + Y_{2t}]$$

dans $\mathscr{A}$.

Densité

Corollaire

La mesure spectrale de J_t est donnée par

$$\mu_t(dx) = 2\frac{k_{2t}(e^{2i\arccos(\sqrt{x})})}{\sqrt{x(1-x)}}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx,$$

où k_t est celle de Y.

$$\phi(P) = \phi(Q) = \theta \in (0, 1)$$

- $\phi(P) = \phi(Q) \Rightarrow P = Q$.
- Si $a = 2P - I$, $b = Y_t a Y_t^\star$ et a et Y sont $\star$-libre

Proposition

$$\phi([(1+a)(1+b)]^n) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + 2^{2n-1}\phi(a) + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\phi((ab)^k).$$

ou de manière équivalente

Proposition

$$\phi[(PY_tPY_t^\star)^n] = \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} + \frac{\phi(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\phi[(aY_taY_t^\star)^k].$$

Loi σ_t de $aY_t aY_t^\star$?

Proposition

- *La transformé de Herglotz de* $aY_t aY_t^\star$ *:*

$$H_{\sigma_t}(z) \triangleq H_t(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} \sigma_t(dw)$$

satisfait

$$\partial_t H_t + \frac{z}{2}\partial_z (H_t)^2 = 2\phi(a)^2 \frac{z(1+z)}{(1-z)^3},$$

$H_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

Preuve : Calcul stochastique libre.

Cas dynamique

Proposition (Demni-Hmidi, 2013)

Il existe $\psi : \mathbb{R}_+ \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$[H_t(\psi(t,z))]^2 = [H_\infty(\psi(t,z))]^2 - [H_\infty(z)]^2 + [H_0(z)]^2.$$

$$H_\infty(z) = \sqrt{1 + 4\phi(a)^2 \frac{z}{(1-z)^2}}, \quad |z| < 1.$$

Corollaire

- *Loi stationnaire de* $aUaU^\star$ *:*

$$\sigma_\infty(dx) = |\phi(a)|\delta_1 + \sqrt{1 + \frac{|\phi(a)|^2}{\sin^2 x}} 1_{\{|\sin x| \geq |\phi(a)|\}} dx.$$

- *La loi de* $aY_taY_t^\star$ *a une masse* $|\phi(a)|$ *en* $z = 1$.

Corollaire

Pour tout $t > 0$, la mesure spectrale de J_t a une masse en $x = 1$:

$$\mu_t\{1\} = \frac{1}{\phi(P)} \max(\phi(a), 0).$$

Proposition (Demni-Hamdi, 2013)

La Transfomé de Cauchy

$$G_{\mu_t}(z) \triangleq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\mu_t(dx)$$

s'écrit

$$G_{\mu_t}(z) = \frac{H_t(\alpha(1/z))}{(1+\phi(a))\sqrt{z(z-1)}} + \frac{\phi(a)}{(1+\phi(a))(z-1)}.$$

avec $\alpha(z) = \frac{z}{(1+\sqrt{1-z})^2}$.

Preuve : On utilise l'identité sur les moments évoquée plus haut.

Expression du flot

Notons,

$$b \triangleq \sqrt{|\phi(a)|^2 + (1 - |\phi(a)|^2)\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}}.$$

Proposition (Demni-Hamdi, 2013)

$$\psi(t,z) = \alpha\left\{\left[\frac{b^2}{b^2 - |\phi(a)|^2}\right]\alpha^{-1}\left\{H^{-1}_{\nu_{2t}}(b)\right\}\right\}$$

Remarque

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \partial_z \psi(t,0) = e^t.$$

Remarque

$\phi(a) = 0$ $(\Leftrightarrow \phi(P) = \phi(Q) = 1/2)$:

$$\psi(t,z) = H_{\nu_{2t}}^{-1}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = ze^{t\,\frac{1+z}{1-z}}$$

donc

$$H_t(z) = H_{\nu_{2t}}(z)$$

et on retrouve

$$aY_t aY_t^{\star} \overset{L}{=} Y_{2t}.$$

Position générale de deux projections

Position générale de deux sev

- E : un $\mathbb{C}$-ev de dimension d.
- U,V : deux sev de E.

Définition

U et V sont en position générale si

$$\dim U \cap V = \max\{\dim U + \dim V - d, 0\}.$$

Remarque

En termes de projecteurs, si

- P : projection sur U.
- Q : projection sur V.
- $P \wedge Q$: projection sur $U \cap V$.

$$tr(P \wedge Q) = \max\{tr(P) + tr(Q) - 1, 0\}$$

avec $tr = \frac{1}{d} Tr$.

Lemme

$$\phi(P \wedge Y_t Q Y_t^\star) = \phi(PQ)\mu_t\{1\}.$$

En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \phi[(pq)^n] = \phi(p \wedge q) \text{ (J. von Neumann)}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\phi(p \wedge q) &= \lim_{n\to\infty} \phi[(pqp)^n] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \mu_{pqp}(dx) \\
&= \mu_{pqp}(1).
\end{aligned}$$

Position générale de deux projections

Définition

$P = P^\star = P^2$ et $Q = Q^\star = Q^2$ dans $(\mathscr{A}, \phi)$ sont en position générale si

$$\phi(P \wedge Q) = \max\{\phi(P) + \phi(Q) - 1, 0\}$$

- Collins-Kemp (Fév. 2013) : vrai pour P et $Y_t Q Y_t^\star$ avec $\phi(P) = \phi(Q) = 1/2$.
- Demni-Hmidi (Avr. 2013) : vrai pour P et $Y_t P Y_t^\star$, $\forall P \in \mathscr{A}$.

References

1. F. Benaych-Goerges, T. Lévy. A continuous semigroup of notions of independence between the classical and the free one. Ann. Probab. 39.
2. *P. Biane*. Free Brownian motion, free stochastic calculus and random matrices. *Fields. Inst. Commun.*
3. B. Collins, T. Kemp. Liberating projections. Available on arXiv.
4. *N. Demni, T. Hamdi, T. Hmidi*. On the spectral distribution of the free Jacobi process. *Indiana Univ. Math. J.*
5. *N. Demni and T. Hmidi*. General position of a projection and its image under a free unitary Brownian motion. Available on arXiv.
6. N. Demni, T. Hamdi. En préparation

Merci pour votre attention