Anne de Roton

# Les ensembles sans solution à une éq linéaire

→ comb., anal. harmonique, combinatoire, anal. fonctionnelle

Intro : article de T. Tao : From harmonic analysis to arithmetic combinatorics, 2008.
→ pb de Kakeya, HL

→
Q : quelle est la taille maximale d'un ens. sans sol. à une éq. linéaire $ax+by=cz$, $a,b,c>0$
voire $x+y=kz$, $k\in\mathbb{N}^*$. Cadre discret | cadre continu.

Soit $E\subset[0,1]$ ou $E\subset[\![1,N]\!]$
↑
mes. Lebesgue ou Hausdorff.

→ article de I. Ruzsa : Solving a linear eq in a set of integers 1993, 1995.
Cas facile : $k\neq 2$ ou $k=?$, ensemble de mesure non nulle

$k=1$ : ensemble sans somme { si N pair, ens de cardinal maximal $[\![\frac{N}{2},N-1]\!]$
angl combinatoire { si N impair, ——— $[\![\frac{N+1}{N},N]\!]$
angl de th. nombres { . E = entiers impairs

Densité : $\frac{1}{2}$.
Analogue continu : $]\frac{1}{2},1]$ ou $[\frac{1}{2},1[$, mais pas pour E = entiers impairs.

$k\geqslant 4$ : Chung - Goldwasser 1996 / Baltz et al. 2004

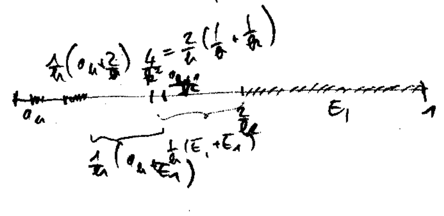
$x+y=kz$ $\quad E=\left(a_k,\frac{k}{2}a_k\right)\cup\left(\frac{2}{k}b_k,b_k\right)\cup\left(\frac{2}{k},1\right)$ avec

$b_k=\left(a_k+\frac{2}{k}\right)\frac{1}{k}$ et $\frac{k}{2}a_k=\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{2}{k}b_k\right)$

$k=3$ : le m̂ ens. est sans solution, mais ils n'ont pas montré la maximalité.
Mais cela a été ~~montré~~ résolu : Matolcsi, Ruzsa, de Roton.
Il y a un ensemble "discret" de densité $\frac{1}{2}$.

$k\geqslant 4$ algorithme glouton : $x+y=kz$ est homogène. On peut supposer que $E\subset[0,1]$.
Partons de 1 : $\frac{1}{k}(E+E)\cap E=\emptyset$ :

Soit $a_k=\inf E$, si $a_k>0$, $\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{2}{k}\right)$, $\frac{a_{k+1}}{k}\geqslant\frac{4}{k^2}$

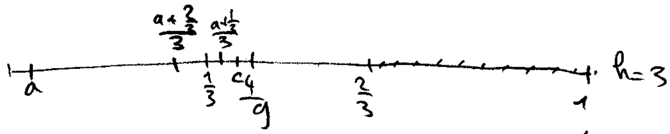


En optimisant, on trouve que 3 ensembles optimisent

Pour montrer que c'est optimal, faisons un trou dans $E_1$ de taille $\varepsilon$.

Cela rajoutera au plus $\frac{2\varepsilon}{h}$ dans l'ensemble à côté, et $\frac{\varepsilon}{h}$ à gauche de celui-ci $\leq \frac{3\varepsilon}{h}$.

($h=3$) Pb : on n'a plus recouvrement.




$\frac{1}{3}(E+E)\cap E = \emptyset$

Si on prend $c = \inf E \cap [\frac{a+1}{3}, \frac{4}{9}]$, $\frac{1}{3}(c+[\frac{2}{3},1]) \supset [\frac{a+1}{3}, \frac{4}{9}]$
et si on fait un trou $\varepsilon$, on crée de la place $\frac{4}{3}\varepsilon$ et on ne gère plus la maximalité.

Densité : on sait que $\lambda(E+E) \geqslant 2\lambda(E)$

Ruzsa : $\lambda(E+E) \geqslant \min(3\lambda(E), \lambda(E)+\text{diam } E)$ ($\lambda$ = mesure intérieure : $E+E$ pas nécessairement mes. si $E$ mes.)

N.B. L'éq générale $ax+by=cz$ montre des situations hybrides.

($h=2$) : pb : invariance par translation. $x+a+(y+a) = 2(z+a)$

$x+y=2z$ : trouver des suites arithmétiques de lg 3 non triviales. [PA3]

Roth 1953 : Si $N$ est assez grand et $A \subset [\![1,N]\!]$ est tel que $|A| \geqslant c\frac{N}{\log\log N}$, alors $A$ contient des PA3.

Il y a une version quantitative.
et Version continue, quantitative.

Idée : soit l'ensemble est aléatoire = uniforme, soit il a de la structure.

On travaillera dans $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ; soit $A \subset \mathbb{Z}_N$ tel que $|A| > \delta N$. Soient $f,g,h : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$. On définit $\Lambda_3(f,g,h) = \frac{1}{N^2}\sum'_{n,r\in\mathbb{Z}_N} f(n)g(n+r)h(n+2r)$.

Si $f=g=h=\mathbb{1}_A$, alors $\Lambda_3(f,g,h) = \frac{1}{N^2}\#\text{PA3}$.

On attend $\Lambda_3(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A) \sim \cancel{\frac{1}{N^2}}\,\delta^3$ si les événements étaient indépendants.

Si $A$ ne contient pas de PA3 non triviale, alors $\Lambda_3(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_A) = \frac{\delta}{N} \ll \delta^3$

↳ Grosse distorsion !

Faisons une ~~$\Theta$~~ Fourier discrète : $\hat{f} : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$, $\xi \longmapsto \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}_N} f(n)\, e\left(-\frac{n\xi}{N}\right)$

$e(x) = e^{2i\pi x}$.

On a $\Lambda_3(f,g,h) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N} \hat{f}(\xi)\hat{g}(-2\xi)\hat{h}(\xi)$.

On aura $f = \mathbb{1}_A = f_1 + f_2$ avec $f_1 = \delta\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N}$. Si $A$ ne contient pas de PA3 non triviale,
alors $\Lambda_3(f,f,f) - \Lambda_3(f_1,f_1,f_1) \gg \delta^3$
$= \sum_{(i,j,k)\neq(1,1,1)} \Lambda_3(f_i,f_j,f_k)$.

Si $\delta^3 \ll |\Lambda_3(f_2, f_2, f_2)| = |\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_N} \hat{f_2}(\xi)^2 \hat{f_2}(-2\xi)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f_2}(\xi)| \, \|\hat{f_2}\|_2^2$.

Il doit donc exister un $\xi \neq 0$ tel que $|\hat{f}(\xi)| \gg \delta^3$.

Il y a donc un biais linéaire : une PA sur laquelle $f$ se concentre.

L'argument se réitère ... à la fin, densité 1 sur des PA très petites.

→ entretemps, Sanders : $\frac{N}{\log N} (\log \log N)^{4 \text{ ou } 5}$.

N.B. : $x + y = kz$, $k \in \mathbb{R}^{+*}$ $k \geq 4$ comme les entiers

$k \in [3, 4[$ comme $k = 3$

Puis il y a des seuils. C'est de plus en plus compliqué lorsque $k \to 2$.

<u>Analogue continu</u> :

Il y a une version quantitative du Th de Roth : en regardant les PA3 dans de grands PA.

→ <u>Th</u> Roth / Varnavides : Soit $N$ un grand nombre premier et $M > 0$ et $\alpha > 0$.

Soit $f : \mathbb{Z}_N \to [0, M]$ tel que $\frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} f(n) > \alpha$. Alors $\Lambda_3(f, f, f) \geq c(\alpha, M)$.

<u>Th</u> Łaba / Pramanik : Si $d\mu = f dx$ avec $f : [0,1] \to [0, M]$ telle que $\int_0^1 f(x) dx > \alpha$

Alors il existe $c = c(M, \alpha) > 0$ telle que $\Lambda_3(\mu, \mu, \mu) > c$, où

$$\Lambda_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu_1}(k) \hat{\mu_2}(-k) \hat{\mu_3}(k)$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y) f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx \, dy$$

Regardons le pb sur des sous-ensembles tels que l'ensemble des nombres premiers. Lorsqu'un ensemble est de densité positive rel$^t$ à cet ensemble, est-ce que...

<u>Principe de transfert</u> : Soit $N$ un grand nombre premier et $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ telle que

① $\frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} f(n) \geq \alpha$ et ② $\|\hat{f}\|_p \leq M$ pour un $p \in ]2, 3[$ et un $M > 0$ et

③ $f \leq \nu$ telle que $\sup_{k \in \mathbb{Z}_N} |(\hat{\nu} - \mathbb{1}_0)(k)| \leq \eta$ pour un $\eta > 0$.

Alors $\Lambda_3(f, f, f) \geq \frac{c(\alpha, 1)}{2} + O_{\alpha, M, p}(\eta)$

- ③ est un critère d'uniformité.
- si on avait ② avec $p = 2$, on aurait directement ce qu'on veut !

Par Parseval, on obtiendrait un gros ensemble où $f$ est borné...

Dém : Posons $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 = f * \sigma$. On veut $f_1$ bornée de densité positive et $\Lambda_3(f, f, f)$ proche de $\Lambda_3(f_1, f_1, f_1)$. Cela guidera le choix de $\sigma$.

$$|\Lambda_3(f,f,f)-\Lambda_3(f_1,f_1,f_1)| = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_N}{}' \hat{f}(\xi)^2 \hat{f}(-2\xi)(1-\hat{\sigma}(\xi)^2\hat{\sigma}(-2\xi))$$

et $R=\{\xi\in\mathbb{Z}_N : |\hat{f}(\xi)|\geq\delta\}$ — Donc $\hat{\sigma}(\xi)$ proche de 1 là où $\hat{f}$ est grand.

et $B=\{n\in\mathbb{Z}_N : \forall\xi\in R\ \|\frac{n\xi}{N}\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\leq\varepsilon\}$ ensemble de Bohr.

$$\beta=\frac{1}{|B|}1_B,\quad \sigma=\beta*\beta \quad (\text{cela marche aussi avec } \beta=\sigma)$$

<u>B</u> utilisé par Bourgain puis Sanders.

$|\Lambda_3(f,f,f)-\Lambda_3(f_1,f_1,f_1)|\leq\ldots$

$|\Lambda_3(f_2,f_2,f_2)|\leq\ldots$ : $|\hat{f_2}(\xi)|=|\hat{f}(\xi)(1-\hat{\sigma}(\xi))| \ll \begin{cases}\varepsilon|\hat{f}(\xi)| & \text{si } \xi\in R\\ \eta & \text{si } \xi\notin R\end{cases}$

$$\leq\begin{cases}\varepsilon|\hat{f}(\xi)|\leq\varepsilon\frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}_N}|f(n)|\leq\varepsilon(1+\eta) \text{ par (3)} & \text{si } \xi\in R\\ \delta & \text{si } \xi\notin R\end{cases}$$

Alors $\Lambda_3(f_2,f_2,f_2) \ll \|\hat{f_2}\|_p\|\hat{f_2}^2\|_{p'} \ll \|\hat{f_2}\|_p\left(\|\hat{f_2}\|_\infty^{2p'-p}\|\hat{f_2}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p'}}$

$$\ll \|\hat{f_2}\|_p^p\,\|\hat{f_2}\|_\infty^{3-p} \ll \varepsilon+\delta.$$

et pareil pour $\Lambda_3(f_i,f_j,f_k)$ pour $(i,j,k)\neq(1,1,1)$

Mais comment trouver $f_1$ bornée ? On va réutiliser (3).

$$|f_1(n)|=|B|^{-2}\sum_{m_1,m_2\in B}{}' f(n+m_1-m_2)\leq|B|^{-2}\sum_{m_1,m_2\in B}\nu(n+m_1-m_2)$$

$$\leq|B|^{-2}\sum_{m_1,m_2\in B}\sum_{r\in\mathbb{Z}_N}{}'\hat{\nu}(r)e\left(r\left(\frac{-n-m_1+m_2}{N}\right)\right) \quad (\text{Fourier inverse})$$

$$\leq\sum_{r\in\mathbb{Z}_N}{}'|\hat{\nu}(r)||\hat{B}(r)|^2$$

Puis principe des tiroirs $\Rightarrow$ B est suffisamment gros.

Idée : on a écrêté la Fourier de $f$.

Green : au sujet des nombres premiers : si on prend $1_P$ : on repose arcs majeurs, arcs mineurs, mais pb : les nb premiers sont très mal répartis !

Puis "W-trick" : $\{m : b+mW \text{ premier}\}$ : lui n'est pas mal réparti / suite arithmétique

cf article de Green-Tao.

Usage d'un th de restriction : th de Thomas-Stein : $\|\hat{f}|_{\text{sphère}}\|^p$ borné par $\|f\|^2$

Mais le crible fait mieux dans le cas spécifique des nombres premiers

Th (cadre continu) [Łaba, Pramanik] : Si $E\subset[0,1]$ fermé support d'une proba $\mu$ avec (1) $\mu([x,x+\varepsilon])\leq C_1\varepsilon^\alpha$ pour $0<\varepsilon\leq1$ et (2) $|\hat{\mu}(k)|\leq C_2(1-\alpha)^{-B}|k|^{-\frac{\beta}{2}}$ $(k\neq0)$ avec $0<\alpha<1$ et $\frac{2}{3}<\beta\leq1$, alors il existe $\varepsilon_0=\varepsilon_0(C_1,C_2,B,\beta)$ tel que si $\alpha>1-\varepsilon_0$, $E$ contient des PA 3.

(?) "uniformité"

cf Körner : lien entre (?) décroissance de $\hat{\mu}$ et relations algébriques pour le support de la fonction $\to$ th de Baire.

Ex : $\Lambda_3(\mu,\mu,\mu) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{\mu}(h)^2 \hat{\mu}(-2h)$ : ça se déduit de (?) !

⚠ Le lien avec les rel. arithmétiques ne s'établit que grâce au noyau de Fejér. Puis on fait comme avant.

Il faudra aussi un th de restriction Mockenhaupt. ($TT^*$).

Autres applications que A : et puis, y a plus qu'à regarder.

Bourgain pour l'ensemble des carrés.

Borne inf : $N e^{-2\sqrt{\log 2}\sqrt{\log N}}$ taille d'ensemble $A = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{i-1}$ $0 \leq a_i \leq d$ avec $b = 2d-1$

(où on utilise un "isom de Freiman") avec $\sum a_i^2 = K$ : "sur un cercle, pas de rel.s 3-linéaires"