

Sur l'espace Lipschitz-libre des compacts dénombrables.

I Introduction

- (M, d) un espace métrique pointé en 0 et $(Lip_0, \|\cdot\|_L)$ l'espace des f^{∞} Lipschitziennes nulles en 0. C'est un dual ! Son predual est l'espace Lipschitz-libre de M , noté $\mathcal{F}(M)$.
On a $\mathcal{F}(M) = \overline{\text{vect}} \{s_n : n \in M\}$ dans Lip_0^* et $s : M \rightarrow \mathcal{F}(M)$ structure canonique $n \mapsto s_n$.

Def : de la AD, la λ -BAP, la MAP = 1-BAP.

- Résultats connus :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a la BAP.
 - $X \in \mathcal{B}$ avec λ -BAP $\Rightarrow \mathcal{F}(X)$ a la λ -BAP. } Godefroy-Kalton
 - M e.m. doublet $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP. : Lamière-Perngwa
 - Il existe K compact métrique tq $\mathcal{F}(K)$ n'a pas la BAP.

Question : $\exists K$ compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la BAP ?

II Décomposition de Kalton

- Notons $M_h = \{n \in M : d(0, n) \leq 2^h\}$ pour $h \in \mathbb{Z}$
 $O_h = \{ \quad \quad \quad \}$
 $A_h = M_{h+1} \setminus O_{h-1} \cup \{0\}$.

$$T_h : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$s_n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \in M_{h-1} \text{ ou si } n \in M \setminus M_{h+1} \\ (\log_2 d(O_n) - (h-1)) s_n & \text{si } n \in M_h \setminus M_{h-1} \\ (h+1 - \log_2 d(O_n)) s_n & \text{si } n \in M_{h+1} \setminus M_h \end{cases}$$

Rm : Théorème [Kalton, 04] : $\forall \gamma \in \mathcal{F}(M) \quad \sum_{h \in \mathbb{Z}} T_h \gamma = \gamma$ inconditionnellement

Conséquence : ① Si $M' = \{0\}$, $\mathcal{F}(A_h)$ est fini et $\sum_{h \in \mathbb{Z}} \|T_h \gamma\| \leq 72 \|\gamma\|$
et les T_h ont de rang fini et $\mathcal{F}(M)$ a la 72-BAP.

② Si M e.m., $(M/M') = \{0\}$, $\mathcal{F}(M/M')$ a la BAP, or
 $\mathcal{F}(M/M') = \mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(M')$.

③ Si $M = \{a_1, \dots, a_N\}$, $\mathcal{F}(M) \cong \left(\bigoplus_{h=1}^N \mathcal{F}(F_h) \right)_1$ avec $F_h = \{a_h\}$
Or la BAP est stable par $\cong$ et $\mathcal{F}_1$ et donc $\mathcal{F}(M)$ a la BAP

ici $M/F = M \setminus F \cup \{0\}$ pour $F \subset M$ fermé, muni de

$$d_{M/F}(x,y) = \begin{cases} d(x,F) & \text{si } y=0 \\ \min \{ d(x,y), d(x,F) + d(y,F) \} & \text{si } x,y \neq 0 \end{cases}$$

Question : Est-ce $M^{(2)} \setminus \{0\}$, ou est-ce $M^{(2)}$ est fini ?

Idee 1 : utiliser la propriété de 3 espace de Godefroy-Saphar.

$$\begin{cases} \mathcal{F}(M) = X \\ \mathcal{F}(M') = F \end{cases} \quad (M')' = M^{(2)} = \{0\} \text{ et alors } \mathcal{F}(M) \text{ a la BAP}$$

On a $\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(M')$ BAP — peut-on en conclure que $\mathcal{F}(M)$ a BAP ?

Problème : Il existe K dénombrable tel que $K^{(2)} = \{0\}$ et $\mathcal{F}(K')^\perp$ n'est pas complémenté dans $Lip_0(M)$

Idee 2 : Réutiliser la décomposition de Kalton : $M^{(2)} = \{0\}$, A_n fini (ou vide)

Donc $\mathcal{F}(A_n)$ a la BAP et il existe $L_j^h = \mathcal{F}(A_n) \xrightarrow{h} \mathcal{F}(A_n)$ de rang fini, et $\|L_j^h\| \leq C_n$ et on note $R_{j,h} = L_j^h \circ S_h$, $\|R_{j,h}\| \leq 72 C_n$.

Question : A-t-on C quelq N' fini $\Rightarrow \mathcal{F}(N)$ a la C-BAP ? Dans ce cas, $M^{(2)} = \{0\}$ et $\mathcal{F}(N)$ a la 72C-BAP ... à la fin, $M^{(n)} = \{0\}$ et $\mathcal{F}(N)$ a la BAP.

Problème : on ne pourra pas atteindre les ordinaux dénombrables.

Solution : obtenu ! $C=1$



Utiliser la th de Godefroy-Saphar. Dualité

But : Soit K e.m. dénombrable : $\mathcal{F}(K)$ est lui-même ambal.

Déf : On a $f \in Lip_0(N) \subset Lip_0(N)$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
 si $X = \mathcal{F}(K)$, $Lip_0(K) \subset Lip_0(K) = \mathcal{F}(K)^*$, $Lip_0(K) \subset NA(\mathcal{F}(K)) \leq \epsilon d(x,y)$
 alors $Lip_0(K)^* \cong \mathcal{F}(K)$.

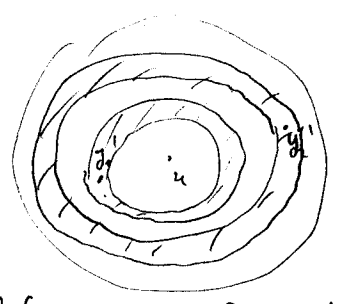
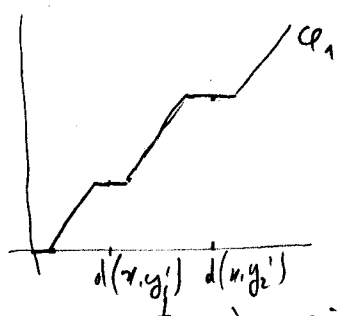
Or $Lip_0(K)$ est séparant si $Lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K :
 $\exists C > 1 \forall x,y \in K \exists h = h_{x,y} \in Lip_0(K) \|h\|_C \leq C \|h(x) - h(y)\| = d(x,y)$

Th : K e.m. dénombrable $Lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K .

Soit K compact dénombrable : $\exists \alpha < \omega_1$, $K^{(\alpha)}$ fini. Soient $x, y \in K$
 et $a = d(x, y)$ Soit $B(x, \frac{a}{2}) \cap K^{(\alpha)} \setminus \{x, y\} = \{y_1^1, \dots, y_{k_1}^1\}$.

Alors $\|c_1\|_L \leq 2$ et
 $C_1 = K \setminus \square$

Il existe $\alpha_1 < \alpha_0$ tel que
 $C_1^{(\alpha_1)} = \{y_{k_1+1}^2, \dots, y_{k_2}^2\}$.



On recommence et on change c_1 de sorte à avoir des plateaux aux y_i^2 : on obtient
 c_2 avec $\|c_2\|_L \leq 2(1 + \frac{1}{2^2-1})$ et on pose $C_2 = C_1 \setminus \square$, etc.

On a ainsi une suite str. $\downarrow$ d'ordinaux : elle s'arrête : il existe α_n t.q. $C_n^{(\alpha_n)}$ fini.

On obtient φ_n tel que $\|\varphi_n\|_L \leq 2 \prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{2^i-1})$

Soit alors $h = 2(\varphi_n(d(\cdot, x)) - \varphi_n(d(0, x)))$: $h(0) = 0$ et

$$\|h\|_L \leq 2 \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^i-1}) \text{ et } |h(x) - h(y)| = d(x, y).$$

Alors $h \in \text{lip}_0(K)$! Notons $\delta = \min \{ \text{taille des plats, distance entre les points de } C_n, \text{ distance entre plats de } C_n \}$

Alors $\delta(x) < \delta \Rightarrow d(z, x), d(h, x)$ sont dans le même plat !

Donc $|h(z) - h(h)| = 0 < \varepsilon d(z, h)$.

On peut donc appliquer le théorème de Pelussa et Plichko : $\text{lip}_0(K)^+ \cong \mathcal{F}(K)$

Théorème : Si K est un compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la NAP.

Rém. : Si $K^{(\alpha)}$ fini, K fini et $\mathcal{F}(K)$ de dim. finie

• Si α est un ordinal dénombrable tel que $K^{(\beta)}$ fini pour tout $\beta < \alpha$,
 alors $\mathcal{F}(K)$ a la NAP.

• Si $K^{(\alpha)} = \{0\}$, posons $S_k : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(A_k)$ tel que $S_n \gamma \xrightarrow{\alpha} \gamma$
 pour $\gamma \in \mathcal{F}(K)$ avec $\|\gamma\| \leq 2$. Alors $\forall k \in \mathbb{N} \exists \beta_k$ $A_k^{(\beta_k)}$ fini
 et donc $\mathcal{F}(A_k)$ a la NAP.

On a donc $L_j^h : \mathcal{F}(A_n) \rightarrow$ de rang fini, $L_j^h \rightarrow 1$ pour $j \in \mathcal{F}(A_n)$
et $\|L_j^h\| \leq 1$ et $R_{j,h} = L_j^h \circ S_h : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ de rang fini, et $P_{j,h} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 1$
pour $j \in \mathcal{F}(K)$ et $\|P_{j,h}\| \leq 72$ et on a le th de Grothendieck : $\mathcal{F}(K) \text{ BAP} \iff \mathcal{F}(K) \text{ dual BAP}$
implique $\mathcal{F}(K) \text{ NAD}$. On a donc $K^{(a)} = \{a_1, \dots, a_N\}$.

$\mathcal{F}(K) \simeq \left(\bigoplus_{k=1}^N \frac{\mathcal{F}(F_{a_k})}{\text{NAD}} \right)_1$ $F_{a_k}^{(a)} = \{a_k\}$. et $\mathcal{F}(K)$ a la BAP et dual $\mathcal{F}(K)$ NAD
par le th de Grothendieck.

Corollaire $M \in \Pi$ compact. Alors $\mathcal{F}(M / M^{(a)})$ a la NAD pour tout α ordinal
dénombrable.

Question: On a un $\mathcal{F}^*$ discret et il existe quelque $\mathcal{F}(\cdot)$ a la BAP?
cf Godofroy-Ozawa.