

Estimation de f^{∞} carrées et calcul H^{∞}

Soit $S_{\varphi} f(u) = \left(\int_0^{\infty} |\varphi_t * f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$ où $\varphi_t(u) = t^{-d} \varphi\left(\frac{u}{t}\right)$ la dilatation.

Si φ est symétrique, on peut lire ceci comme $\mathbb{F}^{-1}(|\hat{\varphi}|^2) = \psi(t\sqrt{-\Delta})$ où $\psi = \dots$ calcul fonctionnel.

Plus généralement, $\left(\int_0^{\infty} |\psi(tA)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Question: A-t-on $\|S_{\varphi} f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L_p}$

Kolton-Weis se sont intéressés à $\int_0^{\infty} |\psi(tA)f|^2 \frac{dt}{t} = \sum_n |\langle \psi(tA)f, e_n \rangle|^2 \sim \mathbb{E} \left| \sum_n \chi_n \langle \psi(tA)f, e_n \rangle \right|^2$
gaussienne

Ici on a la fonction carrée $\|\psi(tA)u\|_{\gamma(H,X)}$ où $\gamma_{\infty}(H,X)$ est donné par

$\|T\|_{\gamma} = \left(\mathbb{E} \left\| \sum_n \chi_n T e_n \right\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}} : \gamma_{\infty}(H,X) = \{T: H \xrightarrow{\text{lin}} X : \|T\|_{\gamma} < \infty\}$

avec $T e_n = \int_0^{\infty} \psi(tA) x e_n(t) dt$.

$\gamma(H,X) = \overline{\{T \in \gamma_{\infty} \text{ de rang fini}\}}$

(Les deux sont égaux si $C_0 \hookrightarrow X$ [appelés "normes L " dans Kolton-Weis] [Hoffmann-Jørgensen/Kwapień])

Ex: Si X est un espace de Hilbert, $\gamma(H,X) = HS(H,X)$.

Raison: $\mathbb{E} \left(\sum_n \chi_n T e_n \mid \sum_i \chi_i T e_i \right) = \sum_i (T e_n \mid T e_i)$ car $\mathbb{E}(\chi_i \chi_n) = \delta_{in}$.

Dans les espaces L^p , on retombe sur les espaces de Littlewood et Paley.

Espace de Banach avec cotype fini: ils sont caractérisés par: les sommes aléatoires gaussiennes $\sum \chi_n x_n$ et les sommes de Rademacher $\sum \epsilon_n x_n$ sont équivalentes.

Calcul fonctionnel: $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) R(z,A) dz$
où Γ est un contour entourant $\sigma(A)$ et $\|A\| \leq C$.

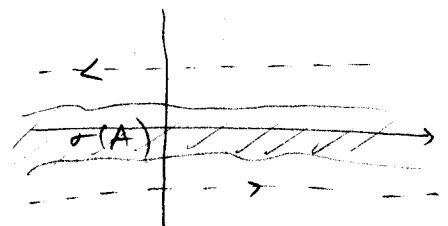
Où ouvert, $\mathcal{A}$ algèbre unitaire de fonctions.

$\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ tel que $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(X)$

Si on a pour chaque $f \in \mathcal{A}$ un $e \in \mathcal{E}$ tel que $\phi(e)$ soit injectif et e. $f \in \mathcal{E}$ "régularisant", on pose $\phi(f) = \phi(e)^{-1} \phi(fe)$: op. fermée.

Q: A-t-on un calcul H^{∞} bon? i.e., $\|\phi(f)\| \lesssim \|f\|_{H^{\infty}}$.

La réponse vient en rapport avec les estimations de f^{∞} carrées.



Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathcal{O}; H)$. Posons $(h \diamond f)(z) = (h(f(z)))$ et

$\phi(f)x: H \rightarrow X$ par $[\phi(f)x](h) = (h(f(\cdot)))_H(A)x = h \diamond f(A)x$.

$\rightarrow$ plus de structure d'algèbre, mais de module!

On parle d'un calcul vectériel!

Def ad hoc: $M \subset H$ est appelé l_1 -borné s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ sur H

telles que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |(x|e_n)| < \infty$. Notons alors

$$M_{l_1} = \inf_{S \text{ borné et } H} (\|S^{-1}\| \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |(x|e_n)|)$$

Q: la réunion d'espaces l_1 -bornés est-elle l_1 -bornée.

Def: $T: X \rightarrow H$ est l_1 -borné si $T(B_X)$ est l_1 -borné.

Prop: Si $\phi: H^\infty(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ est borné (où " $\phi(f) = f(A)$ ") et $g: \mathcal{O} \rightarrow H$ à image l_1 -bornée, alors $\phi(g)x: H \rightarrow X$ satisfait $\|\phi(g)x\|_{\mathcal{L}(H,X)} \leq C \|x\|$

Dem: On a $\| \sum_k x_n (e_n | g(\cdot))(A) x \| \approx \| \sum_k x_n (e_n | g(\cdot))(A) x \|^{2\text{-type}} = \| \sum_k x_n (e_n | g(\cdot))(A) x \|^2$

$$\leq \sum_n \|x_n\| \cdot \sup_z |\sum_k x_n (e_n | g(z))|$$

$\leq \|g(z)\|_{l_1}$ par l'inégalité triangulaire.

De même $[\phi^d(f)x'](h) = (h(f(\cdot)))_H(A)'x'$ définit un opérateur $H \rightarrow X'$ qui est dans le dual $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$.

l_1 -bornitude: Lemme: Si $X = K \subset H$ et $T: K \rightarrow H$,

(a) T est l_1 -borné $\Leftrightarrow$ (b) $T + S \in \mathcal{L}(T)$ ne factorise à travers l_1 .

Dem: Soit $U: \begin{cases} K \rightarrow l_1 \\ x \mapsto (T_n, S_n) \end{cases}, V: \begin{cases} l_1 \rightarrow H \\ (a_n) \mapsto \sum_k x_n (S^*)^k e_n \end{cases}$

donne $T = VU$ et donc (a) $\Rightarrow$ (b). On a (b) $\Rightarrow$ (a) par le Th. Grothendieck.

Si on a (b), $T = \sum_k x_n T_n \otimes e_n$ et $\sum_k |(Tf|e_n)| = \sum_k |(x_n | (Tf|e_n))|$

Q: pour X, Y, B , les T l_1 -bornés forment-ils un idéal? $\leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|S\|_H$

Exemples : (1) $A(\tau) = \{ \sum \alpha_n e^{int} : (\alpha_n) \in \ell_1(\mathbb{Z}) \}$

(2) $\mathcal{C}^s[0,1] \hookrightarrow L_2[0,1]$

$B_{p,q}^s[0,1] \hookrightarrow L_1[0,1]$ sont des op. ℓ_1 -bornés

$W^s[0,1] \hookrightarrow L^2[0,1]$

(3) $W_1^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow L(\mathbb{R})$ (ou W_1^s , $s > 1$) aussi

Dém: Soit $\eta \in C_c^\infty$, $\eta > 0$, de support $\subset]-\pi, \pi[$ tel que $\sum \eta(t-k) \equiv 1$, et soit $f_{m,k}(t) = \eta(t-k) e^{-int}$: ils

forment une base de Riesz. Une double IPP dans

$(f_{m,k} | g)$ donne un facteur $\frac{1}{n^2} \|g\|_{W_1^2} \rightarrow$ sommable.

Applications: A "strip type": spectre $A \in St_\alpha = \{ |Im z| < \alpha \}$.

Posons $g: \begin{cases} St_\alpha \longrightarrow H = L_2(\mathbb{R}) \\ z \longmapsto \psi(t+z) \end{cases}$ où $\psi \in \mathcal{S} = \{ f \text{ hol. } f \in L_1(\mathbb{R}) \}$

On a $g(z) \in W_1^2(\mathbb{R})$ en utilisant le noyau reproduisant $k(w,z) = \frac{e^{-(w-z)^2}}{w-z}$. Conséquence: Si A admet un calcul

H^∞ borné, la prop $\| \psi(t+A)x \|_{\mathcal{Y}(L_2(\mathbb{R}), X)} \lesssim \|x\|$

Avec la Θ de Fourier: $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{ch(\omega s)}$ avec ω grand, on a

$\| \frac{1}{ch(\omega s)} e^{-isA} x \|_{\mathcal{Y}(\mathbb{R}, X)} \lesssim \|x\|$.

Ici les estimations de $f^{(n)}$ canées se réduisent au calcul H^∞ .

Théorème: Soit $m \in L^\infty$ et $u(z) = \int_{\mathbb{R}} m(t) f(t,z) g(t,z) dt$, où $\phi(g) \in \mathcal{Y}(H, X)$ et $\phi(t) \in \mathcal{Y}(H, X)$.

alors $\phi(u): X \rightarrow \mathcal{Y}(H, X)$ est borné. Typiquement, $H = L_2(\mathbb{R})$.

Quelques exemples: $u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int \underbrace{u(w)}_m \underbrace{\frac{e^{-(w-z)^2}}{w-z}}_{f(t,z) = g(t,z)} dw$

Exemple 2: Si $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, il existe F_1, F_2 tels que $f(z) = \int_0^\infty \underbrace{F_1(t) t^2 z e^{-2tz}}_{f(t,z)g(t,z)} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty F_2(t) z e^{-2tz} dt$.
avec $f = g = tz e^{-tz}$

Corollaire: $S_1 \left\{ \begin{array}{l} \exists A T(t) u \in \gamma \\ \exists A' T(t) u' \in \gamma' \end{array} \right.$ pour tout u pour tout u' on a un calcul vectoriel bon.
 $S_2 \left\{ \begin{array}{l} A \hat{=} T(t) u \in \gamma \\ A \hat{=} T(\cdot)' u' \in \gamma \end{array} \right.$ on a un calcul vectoriel bon.

Ainsi, on a à la base un argument de "l₁-bon"

"R-rectaül" " $\varphi(tA)$ " " $\varphi_1(z) = z e^{-z}$ " " $\varphi_2(t) = \sqrt{t} e^{-t}$ "

NB S_1 X a un type matriciel, $\gamma(H, K) \cong \gamma(H, X')$.

Pour éviter cette hypothèse, je ne travaille qu'au niveau du dual.

cf Kalton - Tchenko.