

Classification des groupes quantiques "easy"

Sven Raum
19/11/2013

avec Noélie Weber

→ dans le cadre de Woronowicz (années '80)

A C^* -algèbre unifiée.

Δ $*$ -homomorphisme de A dans $A \otimes A$ tel que $\Delta \circ \text{id} \circ \Delta = \text{id} \otimes \Delta \circ \Delta$

et $\overline{\text{span}} \Delta(A)(1 \otimes A) = \overline{\text{span}} \Delta(A)(A \otimes 1) = A \otimes A$ (simplifiabilité) ^(paragraphe 6)

exemple canonique: $C(G) \xrightarrow{m^*} C(G) \otimes C(G) \cong C(G \times G)$ et un groupe quantique
si G est un groupe compact. $a \mapsto a$
et $u_{ij} : g \mapsto g_{ij}$ fonction coordonnée.

Si G est un groupe de Lie et $G \subseteq U_n$, la structure $(C(G), u)$ définit tout
le groupe quantique: $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$.

Définition: Un groupe quantique de matrices est une C^* -algèbre A unifiée
munie de $u \in M_n(A)$ tel que $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$ définit $A \rightarrow A \otimes A$ une comultiplication.

On suppose de plus u unitaire et $\bar{u} = (u_{ij}^*)$ inversible.

Wang '95: $A_0(n) = C^*(u_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid u = \bar{u} \text{ unitaire})$. On a $C(O_n^+) = A_0(n)$.
 $A \otimes A_0(n) / m_{y=y^*} \cong C(O_n)$.

Comparaison avec O_n : - ressemblance au niveau de la distribution des caractères
- Théorème de de Finetti.

Constructions similaires: S_n^+, H_n^+ , où $H_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes S_n$.

Considérons le partition sur k et l points: $p \in P(k, l)$ et

$$T_p: (\mathbb{C}^n)^{\otimes k} \rightarrow (\mathbb{C}^n)^{\otimes l}$$

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \mapsto \sum_{j_1, \dots, j_l} \delta_p(i, j) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \text{ où } \delta_p(i, j) \in \{0, 1\}.$$

$\delta_p(i, j) = 1$ si et seulement si la partition ne relie que des nombres égaux

$$\begin{matrix} i_1 & \dots & i_k \\ \vdots & & \vdots \\ i_1 & \dots & i_k \end{matrix}$$

ex: $k=2, l=0, p = \emptyset$. $\delta_\emptyset((1,2)) = 0$
 $\delta_\emptyset((1,1)) = 1$

$$T_\emptyset(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = \delta_{i_1, i_2} \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \vdash \quad & \delta_H((1,1),(1,1)) = 1 \\ & \delta_H((1,1),(1,2)) = 0 \end{aligned} \quad T_H(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = \delta_{i_1, i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_1}$$

$$\vdash \vdash \quad T_{II}(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = e_{i_1} \otimes e_{i_2}$$

Soit (A, Δ) un groupe quantique: un élément $u \in M_n(A)$ est une coreprésentation unitaire si u est unitaire, $\bar{u}$ est inversible et $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$.

Si u, v sont des coreprésentations unitaires, $(u \otimes v)_{((i_1, i_2), (j_1, j_2))} = u_{i_1 j_1} v_{i_2 j_2}$

Entrelacements: $u \in M_n(A), v \in M_m(A)$ coreprésentations unitaires:

$$T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m \text{ entrelace } u \text{ et } v \text{ si } (T \otimes 1)u = v(T \otimes 1) \quad (\text{où } M_n(A) \cong M_n(\mathbb{C} \otimes A))$$

Un groupe quantique de matrices (A, u) est déterminé par $\text{Hom}(u^{\otimes h}, u^{\otimes l})$.

Définition: (A, u) est easy s'il y a des ensembles $\mathcal{G}(h, l) \subseteq \mathcal{P}(h, l)$ tels que $\text{Hom}(u^{\otimes h}, u^{\otimes l}) = \text{span} \{T_\mu: \mu \in \mathcal{G}(h, l)\}$.

- Ex: O_n correspond à P_2 (partitions paires)
- | | | |
|---------|-------|---|
| O_n^+ | _____ | NC_2 (partitions paires non croisées) |
| S_n | _____ | P |
| S_n^+ | _____ | NC |

Il convient que $CCH_n^+ \rightarrow (A, u)$ avec u irréductible, i.e. $\dim \text{Hom}(u, u) = 1$.

Th: Il y a 13 gq "easy" non "hyperoctaédraux" entre H_n^+ et H_n .

Dans le langage des partitions: 13 groupes q qui n'ont pas $\vdash \in \mathcal{G}(2, 2)$ ou qui ont deux points isolés $\dots \in \mathcal{G}(2)$.

Considérons $CCH_n^+ = C^*(u_{ij}: 1 \leq i, j \leq n \mid u = \bar{u} \text{ unitaire et } u_{ij} \text{ sont des } \text{partitions})$
 $C(H_n) = CCH_n^+ / xy = yx$

Groupes q entre H_n^+ et H_n : $CCH_n^+ \rightarrow A \rightarrow C(H_n)$.

Le cas "theorie des groupes": Soit (A, u) qqdm tel que $u = \bar{u}$, u_{ij} des matrices partielles, u_{ij}^2 centrale dans A . Alors $A \cong C^*(\Gamma) \rtimes C(CG)$, où CG est le groupe produit de $G \subseteq S_n$ et $\ker(\mathbb{Z}_2^{*n} \rightarrow \Gamma)$ et G -invariant.

ici, $\rtimes$ est un "produit semi-direct": par exemple, $\Gamma = \mathbb{Z}_2^{\otimes n}$, $G = S_n$.

Alors $C^*(\Gamma) \cong C(\mathbb{Z}_2^{\otimes n})$ et $C^*(\Gamma) \rtimes C(S_n) \cong C(\mathbb{Z}_2^{\otimes n} \rtimes S_n)$.

Theoreme: Si un groupe quantique easy hyperoctaédral (A, u) satisfait " u_{ij}^2 central dans A ", alors $A = C^*(\Gamma) \rtimes C(S_n)$ avec Γ groupe de reflection "fortement symétrique":

$\ker(\mathbb{Z}_2^{*n} \rightarrow \Gamma) \stackrel{=K}{\text{est}} S_n$ -invariant: invariant sous "identification de lettres" $i(1), \dots, i(n), \dots$ et $a_i \mapsto a_{i(l)}$ définition automorphisme de $\mathbb{Z}_2^{*n}$ et K doit être invariant sous toutes ces applications.

Theoreme: Tous les qq. easy hyperoctaédraux qui ne sont pas "theorie des groupes" font partie d'une suite denombrible $H_n^+ \geq G_1 \geq \dots \geq G_n \geq \dots \geq G_\infty \geq H_n^{[\infty]}$

CC:

↕
définis par des relations de commutation $C^*(\mathbb{Z}_2^{*n}) \rtimes C(S_n)$.
Q: peut-on les décrire algébriquement d'une façon systématique? Cela permettrait de faire des probabilités!

Les exemples, en tant que C^* -algèbres, sont $C^*(\Gamma) \rtimes C(S_n)$.

→ $G_k = C^*(u_{ij} \mid u = \bar{u} \text{ unitaire, } u_{ij} \text{ matrices partielles et } [u_{ij}^2, u_{i(1)j(1)} \dots u_{i(l-1)j(l-1)} u_{i(l)j(l)} u_{i(l-1)j(l-1)} \dots u_{i(1)j(1)}] = 0 \text{ pour tous } i, j, i(1), \dots, i(l), j(1), \dots, j(l), l \leq k$.

et ces C^* -algèbres sont toutes non isomorphes ...