

≤ de Poincaré, $\frac{1}{2}$ groupes standard uc.

$(T_t)_{t \geq 0} = e^{-tA}$ agissant sur $L^2(\mu)$ ou $(\mathcal{H}, \tau)$, $\tau(\text{Id})=1$, μ proba et dit standard si chaque T_t est c.p., unitaire, normal, et $T_t^* = T_t$ sur L^2 .
(et preserve la mesure)

cf. Jørgensen-Zeng : (T_t) est standard n.c si de plus $\|T_A(f, f)\|_{L^2} < A$ pour $f \in \text{Dom } A$, où

$$2T_A(f, g) = -A(f^*g) + (Af^*)g + f^*Af \quad (\text{Bakry-Emery})$$

N.B. : $T_A(f, f) \geq 0$ et (T_t) c.p.c. $\Leftrightarrow (T_A(f_i, f_j))$ définie positive.

(T_t) est de diffusion si de plus A est un op. de diffusion du 2^e ordre symétrique (c'est-à-dire : Ornstein-Uhlenbeck : $Lf = \sum (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d, \gamma)$) (et $L = -\Delta + \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$)

Notons $\text{Fix } A = \{f \in \mathcal{H} : T_t(f) = f\} = \{Af = 0\}$. C'est une s.-avn de $\mathcal{H}$, où $\mathbb{E}_{\text{Fix } A}$ l'espérance conditionnelle $\mathcal{H} \rightarrow \text{Fix } A$.

L'inégalité de Poincaré associée à un sg standard sur $L^2(\mu)$ où μ invariante par T_t

$$\int T_t f d\mu = \int f d\mu : \text{c'est le spectral gap pour } A : \|f - \mathbb{E}_{\text{Fix } A} f\|_{L^2(\mu)} \leq C \left(\int T_A f d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{appel : } 2T_A(f, f) = -A(f^*f) + (Af^*)f + f^*Af : \text{donc}$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\mu)}^2$$

$$\|A^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\mu)}^2 = \int T_A(f, f) = \|T_A(f, f)\|_2.$$

N.B. : si on pose $L_0^2 = \{f : \mathbb{E}_{\text{Fix } A} f = 0\}$, et $f \in L_0^2$, $\|A^{\frac{1}{2}} f\| \leq C \|g\|_2$.

→ c'est la norme de la racine de l'inverse. Cela justifie l'appellation "spectral gap".

Inégalité de Poincaré pour $p \geq 2$, associée à $(e^{-tA})_{t \geq 0}$.

$$\text{Pour O-U : } T_L(f, f) = L(f, f) = |\nabla f|^2$$

N.B. : Dérivation de suite sur $\{-1, 1\}^N$

Inégalité de Poincaré pour $p \geq 2$ associée à $(e^{-tA})_{t \geq 0}$: A-t-on

$$(P_{p, \mu}) \quad \exists \|f - \mathbb{E}_{\text{Fix } A} f\| \leq C_p \|T_A(f, f)\|_{L^p}^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } f = f^*$$

(équivalent à " $\nu \leq C_p \max(\|f\|, \|T_A(f, f)\|)$ " pour f général)

Condition de Bakry-Emery : $T_{2, A}(f, f) \geq \alpha T_A(f, f)$, où

$$T_{2, A}(f, f) = -A(T_A(f, f)) + T_A(Af, f) + T_A(f, Af) \quad (\text{le } \alpha \text{ apparaît dans les constantes !})$$

Cela implique que $T_t T_A(f, f) \leq e^{-2\alpha t} T_A(T_t f, T_t f)$.

Th (Junge - Zeng) : si (T_t) st standard m.c et $T_{2,A} \geq \alpha T_A$;

1) si de plus (T_t) st de diffusion, on a $(P_{t,\mu})$ avec $c_p = O(\sqrt{t})$.

(ingrédients : Dilatation de Rota + Burkholder Davis Gundy pour martingales continues, en $\sqrt{t}$)

2) On a $(P_{t,\mu})$ avec $c_p = O(\sqrt{t})$

3) On a $(P_{t,\infty})$ avec $c_p = O(\sqrt{t})$

ingrédients : Dilatation markovienne Junge - Ricard - Shlyakhtenko

(cas 2) : les inégalités de martingales continues se déduisent des $\leq$ martingales discrètes
Dilatation : en $M \xrightarrow{\pi_t} W \subseteq W$ avec π_t préservant la mesure. avec $W \downarrow$
nouvelle forme de martingale renversée ; si $s > t$, $\mathbb{E}_s \pi_t = \pi_s$ T_{s-t} et donc

On utilise Burkholder-Perezthal conditionnée (Junge - Ricard - Shlyakhtenko) st une m.c. continue renversée.

En discret : $\| \sum dx_n \|_p \leq O(p) \| \sum \mathbb{E}_{n-1} (dx_n^* dx_n + dx_n dx_n^*) \|_p^{1/2} + \underbrace{\left(\sum \| dx_n \|_p^2 \right)^{1/2}}_{\text{termes qui disparaissent en continu}}$

En continu (on considère des subdivisions de $p_n \rightarrow 0$) :
martingales renversées :

$$\sup_{0 \leq t} \left\| \sum_{s_j \leq t} x_{s_{j+1}} - x_{s_j} \right\|_p \leq O(p) \left\| \sum_{s_j \leq t} (|dx_n|^2 + |dx_n^*|^2) \right\|_p^{1/2}$$

(cas 3) : en discret : (x_n) martingale : $\| \sum dx_n \|_p \leq O(\sqrt{p}) \| \sum \| dx_n \|_p^2 \|_p^{1/2}$

le passage en continu : astuce de résultat de Junge - Koetter - Penin - Xu :

(cf Junge - Penin) et sup ~~de~~ Δ disparaît : passage à la limite délicat.

N.B : arguments similaires en commutatif

BDA non conditionnée, commutatif martingale discrète : $\| \sum dx_n \|_p \leq O(p) \| \sum \| dx_n^* \|^2 + \| dx_n \|^2 \|_p^{1/2} \leq O(p) \| \sum \| dx_n \|^2 \|_p^{1/2}$

cf. Davis, Barlow-Yor.

Conséquence : (il existe des exemples en m.c. où on a $P_{t,\mu}$ avec $c_p = O(\sqrt{t})$)

de $P_{t,\mu}$ avec $O(\sqrt{t})$ ou de $P_{t,\infty}$: inégalité exponentielle :

$$\tau e^{t(f - \mathbb{E}_{f^*} f)} \leq 2e^{Mt} \text{ avec } M = \max \{ \|T_A(f, f^*)\|_\infty, \|T_A(f^*, f^*)\|_\infty \}$$

conséquence du (cas 3)

$$\text{Si on a } P_{t,\mu} \text{ avec constante en } T_p \text{ et } f = f^* : \tau e^{t(f - \mathbb{E}_{f^*} f)} \leq 2\tau e^{cT_A(f, f^*)t} \leq 2e^{c\|T_A(f, f^*)\|_\infty t}$$

$$\text{On obtient } 2\tau e^{t\|f\|} \leq \tau \chi(t) = \tau(\chi(t))$$

Variante : $\tau(e^{t(f - \mathbb{E}_{f^*} f)}) \leq e^{ct^2 M}$: elle sert pour une inégalité de transport sur la distance de Wasserstein : Bobkov - Götze en commutatif (diffusion) à partir de log. Sobolev / Bakry-Emery

Avec densité $\rho > 0$, $\tau(g) = 1 : \tau(\rho \log \rho) \leq C \|T_A(f, f)\|_2^{1/2}$.

(3)

Cela ne se généralise pas en noncommutatif.

Exemples : ex classiques. (Mais il faut vérifier Bahy-Emery).

- variété riemanniennes compactes : Bahy-Emery ✓

- espace de Fock Γ_q , $-1 \leq q \leq 1$: $\Gamma_2 \geq \Gamma_1$, dû à Tunge-Zeng

- $\mathcal{U} = \mathcal{L}(G)$, G dénombrable discret, $T_+(\lambda_g) = e^{-\psi(g)} \lambda_g$
avec $\psi(g)$ cond. nég : $\psi(e) = 0$, $\psi(g) = \psi(g^{-1})$, T_+ c.p. (cf H. Schönborg)

$$\begin{aligned} 2 \quad \Gamma_1(\lambda_g, \lambda_h) &= [\psi(g^{-1}h) + \psi(g) + \psi(h)] \lambda_{g^{-1}h} = K(g, h) \lambda_{g^{-1}h} \\ 2 \quad \Gamma_2(\quad) &= (K(g, h))^2 \lambda_{g^{-1}h} \end{aligned}$$

Exemple : $e^{-t|n|}$ en $G = \mathbb{Z}$ (sg de Poisson)

• Bahy-Emery stable par $\otimes$ et par $*$: donc cela marche avec $\alpha = 1$
pour $G = \mathbb{F}_m$, $G = \mathbb{Z}^d$, $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $G = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^d$ pour certains ψ (et parfois $\alpha > 1$)