

Moyennabilité pour les algèbres L^1 de G .

Moyennabilité : pour A algèbre de Banach munie de $m: A \otimes A \rightarrow A$

Def. (Johnson) A est moyennable si toute dérivation $\delta: A \rightarrow X^*$ est intérieure.
 $\exists \xi \in X^* \quad \delta(a) = a\xi - \xi a$. Ici X^* est dual et A est bimod.

Th (Johnson) (comment faire des moyennes avec cette définition) :
 A est moyennable si A a une diagonale approximative $d_\alpha \in A \hat{\otimes} A$:
 $a d_\alpha - d_\alpha a \rightarrow 0$ pour tout $a \in A$ et $\alpha m(d_\alpha) \rightarrow a$ et $\|d_\alpha\| \leq C$
 si A a une diagonale virtuelle $d \in (A \hat{\otimes} A)^{**}$: $a \cdot d = d \cdot a$ et $m^{**}(d) = a$ et $\|d\| \leq C$.

Ex $A = M_n$, U_n groupe unitaire $d = \int_{U_n} U^* \otimes U dU$: alors
 si unitaire $a \cdot d = \int_{U_n} a U^* \otimes U dU = \int_{U_n} U^* \otimes U a dU = d \cdot a$ et puis c'est vrai pour tout

Remarque : A a une unité approchée.

Théorème : (Haagerup, Connes.) : si A C^* algèbre, A est moyennable $\iff A$ nucléaire.
 (i.e. A approximable par des matrices)

Soit G loc^l compact (discret ou compact).

Def : G est moyennable si G admet une moyenne :

$m: L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ état invariant par translation à gauche.

G définit plein d'algèbres : $C_r^*(G)$, $L_1(G)$, $A(G)$ (représente des ρ régulières)
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $L^1(G)$ $C(G)_*$

si G abélien, $L(G) = L^\infty(\hat{G})$.

Les choses sont-elles bien faites ?

Th : G est moyennable si
 $G \curvearrowright L^1(G)$ action à gauche et G admet des vecteurs L^2 presque invariants de norme 1
 $C_r^*(G)$ nucléaire
 $A(G)$ a une unité approchée (Th de Leptin)
 $L^1(G)$ moyennable

⚠ mais pas si $A(G)$ moyennable

On a $A(G)$ moyennable $\Rightarrow G$ moyennable.

Or Thm (Johnson) : $A(SU(2))$ et $A(SO(3))$ ne sont pas moyennables.

Thm (Ruan): Voyons $A(G)$ comme espace d'opérateurs et considérons la propriété cb-moyennable où $\hat{\otimes}$ est remplacé par $\hat{\otimes}_{op}$. On a alors G moyennable $\Leftrightarrow A(G)$ cb-moyennable.

Ici, moyennable $\Rightarrow$ cb-moyennable.

Notion "biflatness": cherchons qqch de plus faible que la diagonale approchées: $\theta: (A \hat{\otimes} A)^* \rightarrow A^*$ avec $\theta \circ m^* = Id$ et θ bimodulaire.

On a moyennable $\Rightarrow$ biflat. Considérons $\theta: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ $\theta_\alpha = \theta^*$ et $\theta = \lim_\alpha \theta_\alpha$.

Que donnent les axiomes sur θ :
 • $a m(\theta_\alpha) \rightarrow a$ donne $\theta \circ m^* = Id$
 • $a \theta_\alpha - \theta_\alpha a \rightarrow 0$ donne θ bimodulaire.

De plus, moy $\Rightarrow$ approx de l'id.

On a biflat + approx de l'id $\Rightarrow$ moyennable.

e_x approx de l'id; $\theta(e_x)$ reconstruit la moyennabilité.

Groupes quantiques compacts: A C^* -algèbre unifiée

Deux exemple canoniques: $\mathcal{K}(G)$, G compact; $C_r^*(G)$, G discret.

considérons le transport du produit naturel vers le dual ou le prédual: on obtient $\Delta: A \rightarrow A \hat{\otimes}_{min} A$. C'est une C^* -représentation coassociative

et $C_r^*(G)$: principe de Fell: $\Delta \lambda_g = \lambda_g \otimes \lambda_g$.

Existence d'une mesure de Haar: contrôler avec une mesure, donne h .

si $w \in A^*$ et $h \in A^*$, $(w \otimes h) \circ \Delta: A \rightarrow \mathbb{C} = w(1)h$ et $(h \otimes w) \circ \Delta = w(1)h$.

considérons $M = \text{ANS}(A, h)$. Ce sera $L^\infty(G)$ et $L^1(G)$ sera $L^\infty(G)_*$.

Faisons des calculs avec le coeff de rep $\rightarrow$ connaître $L^2 \rightarrow$ connaître une h.o.m.

$\mathcal{K}(G)$, G compact, rep. irred, base de L^2 : Peter-Weyl.

th de Weyl: il y a une notion de rep de dim finie: $(u_{ij}) \in M_n(A)$,
 u_{ij} unitaires. (idée: $\pi(g) = ((\pi(g))_{ij})$) $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$.

Toutes les ^{irréductibles} rep de G sont de dim. finie. Notons $\mathbb{1} = \{ \text{repr} \}$.

Toute rep est somme directe d'irréductibles. On a une base naturelle de $L^2(A, h)$ de (u_{ij}^α) rep. in convenablement renormalisés.

$h((u_{ij}^\alpha)^* u_{kl}^\beta) = \delta_{\alpha=\beta} \delta_{ij=kl} \frac{(Q^\alpha)^{-1}}{m_\alpha}$ en choisissant bien l'ordre.
 et il reste à diagonaliser les Q^α
 $h(u_{kl}^\beta (u_{ij}^\alpha)^*) = \delta_{\alpha=\beta} \delta_{kl=ij} \frac{Q_{kl}^\alpha}{m_\alpha}$ → cela nous calcule le groupe modulaire.

Remarque : $\text{Tr } Q^\alpha = \text{Tr } Q_\alpha^{-1} = m_\alpha$: m_α s'appelle dimension quantique.

Car $\mathcal{B}(A)$: $m_\alpha = m_\alpha$, $Q_\alpha = Q_\alpha^{-1} = \text{Id}$

Def. On dit que G est Kac si $Q_\alpha = \text{Id}$. Dans ce cas h est une h.c. et c'est une caractérisation.

Si D est un groupe discret, les χ_i sont une base de $L^2(D)$ On a $\Delta(\chi_i) = \chi_i$
 → repr de dim 1. On est en train de décrire cela.

On a ainsi une notion de moyenne, G sur $\hat{G}$
 $(u_{ij}^\alpha) \xrightarrow{\text{notion de } \alpha} \text{OTM}$

[C'est l'analogue de $\widehat{C^*(D)} = C^*(D)$] On a une moyenne sur $(\hat{A})^+$ telle que $m * u = u * m$

- Considérons $\hat{G}$ moyennable
- (i) $\hat{G}$ admet des vecteurs L^2 presque invariants (Tomatsu)
 - (ii) (comme que dans le cas compact)
 - (iii) $C^*(G)$ nucléaire.
 - (iv) $L^1(G)$ une approximation de l'identité
 - (v) $L^1(G)$ est opérateur-moyennable.

On a
 (i) ou Tomatsu
 v = iw, u = iu, i = iv
 . Dans le cas Kac, tout est équivalent (Ruan)

iii Zi : C'est ouvert. Calculs à faire.

Quid du th de Ruan : A-t-on $L^1(G)$ op-moyennable (Z) $\begin{cases} G \text{ moyennable} \\ G \text{ moyennable} \end{cases}$

Th. Non ! Ce n'est vrai que dans le cas Kac

On passe par biflatus : $L^1(G)$ biflat $\Rightarrow G$ Kac.

Idée : on regarde les Q_α et on interprète en espace d'opérateurs : $L^1(G) = A$,
 $A^* = C^*(G)$ $(A \otimes_{\text{op}} A)^* = C^*(G) \otimes C^*(G)$ Biflat correspond à
 chercher un opérateur bimodulaire $\alpha : L_\infty \otimes L_\infty \rightarrow L_\infty(A) + q.d.B = \text{Id}$.

(Idée : laup name : $\Delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kl}$ et $\alpha(u_{ij} \otimes u_{kl}) = \sum_{\alpha=\beta} \chi_{\alpha} u_{ij} u_{kl}$
 Alan $m_\alpha \geq m_\alpha$: $\sum \chi_{ii} = 1$
 $\Delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kl}$

π représentation: $m_\pi \leq \|u\| m_\pi$. Puis on passe à $\pi^{q,h} = \oplus \text{unrep.}$
 et $m_\pi \text{ en } \|u\| \geq m_\pi \text{ on } \text{et } m_\pi \|u\|^{1/h} \geq m_\pi \dots \text{argument de séries entières.}$
 et $m_\pi > m_\pi$ (et $m_\pi \leq m_\pi$ est clair).

Dans avait considéré l'unitaire c.p. ... et montré bi-projectif.
 ... tout ceci cache les multiplications.

$M_a((u_{ij}^\alpha)) = \underbrace{a^\alpha}_{\text{matrice scalaire}} (u_{ij}^\alpha)$ remplace $m_a(\lambda_g) = a(g) \lambda(g)$.

$a = \oplus a^\alpha$ et $m_a(u_{ij}^\alpha) = [(a^\alpha(u_{ih}^\alpha))]_{ij} = \sum_k a_{ik}^\alpha u_{kj}^\alpha$.

Ces objets se comportent comme des multiplications habituelles:

$a > 0 \Rightarrow M_a \text{ c.p.}$

et le H de Haagerup que $\|m_a\|_c = \inf_{\text{rep. fidèles}} (\sum_j |m_{ij}|) = a_{y=1/2}$
 a son analogue (un peu dur à écrire)

Si le groupe est moyennable, on a des multiplications qui font l'approximation,
 mais on ne sait pas le rendre de rang fini $\rightarrow$ on ne sait pas le rendre.
 $\rightarrow$ notion de longueur pour la représentation ... cf de Pourcin

$\rightarrow$ on peut faire des log-soboles...

(contre-ex. évident: $SU_q(2)$: compact, moyennable, moyennable).

Mais $L^1(SU_q(2))$ n'est pas moyennable ... il faut changer la notion de moyennabilité...

il faut peut-être changer le produit tensoriel: il faut que le groupe modulaire rentre dans la définition du produit tensoriel!