

L^p -distorsion de graphes finis et p -trou spectral

e.m. fini : comment le plonger dans L^p ?

Soit $F: (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ injective. On pose $\text{dist} F = \sup_{x \neq y} \frac{\delta(F(x), F(y))}{d(x, y)} = \underbrace{\sup_{x \neq y} \frac{\delta(F(x), F(y))}{d(x, y)}}_{\|F\|_{\text{Lip}}} \underbrace{\sup_{x \neq y} \frac{d(x, y)}{\delta(F(x), F(y))}}_{\|F^{-1}\|_{\text{Lip}}}$

Dire que F est isométrique, c'est dire que $\text{dist} F = 1$.

On a aussi $c_Y(X) = \inf \{ \text{dist} F : F: X \hookrightarrow Y \}$ et $c_k = L^p(q_1)$

Remarque : si (X, d) est fini, $c_k(X) \leq \text{diam } X = c_{2^{\text{diam}}(X)}$ sur les e.m. finis.

il suffit de considérer $X \hookrightarrow \ell^\infty(X)$.

• [Bourgain 1985] Si X est un e.m. fini, alors $c_k(X) = O(\log |X|)$

(But de cet exposé : on ne peut pas faire mieux !)

Notion pour une borne inférieure : soit X un graphe fini, connexe k -régulier, sans arête multiple et sans lacet.

On munira X de la distance de graphes.

Considérons le p -laplacien : $1 < p < \infty$: $\Delta_p f(u) = \sum_{v \sim u} (f(u) - f(v))^{p-1}$

pour $f \in \ell^p(V)$, où $a^{[p]} = |a|^{p-1} \text{sign } a$.

• f est une fonction propre de valeur propre λ si $\Delta_p f = \lambda f^{[p]}$

$\lambda_1^{(p)}(X) = \inf_{f \neq 0} \frac{\sum_{u \sim v} |f(u) - f(v)|^p}{\sum_{u \in V} |f(u)|^p}$ } $\Delta_p f = \lambda f^{[p]}$ "quotient de Rayleigh"

ce trou spectral est bien défini pour $p \in [1, \infty[$, donc même pour $p=1$.

Si $\alpha \in \text{Sym}(V)$, posons $g(\alpha) = \min_u d(u, \alpha(u))$ et $D(X) = \max_{\alpha \in \text{Sym}(V)} g(\alpha)$

→ combien α envoie les points loin ?

N.B. Donc $D(X) \leq \text{diam } X$ avec égalité ssi $\exists \alpha \in \text{Sym}(V)$ $d(u, \alpha(u)) = \text{diam } X$

⚠ α n'est pas forcément un automorphisme pour X (ne préserve pas forcément l'adjacence)

Théorème. Si X est un graphe fini k -régulier, $c_k(X) \geq D(X) \left(\frac{\lambda_1^{(k)}(X)}{2^{k-1}k} \right)^{\frac{1}{k}}$

Exemple : graphes de Cayley : Soit G groupe et S partie génératrice symétrique ($S = S^{-1}$) : on pose $X = (G, S)$ avec G comme sommets de X et $g, g's$ comme arêtes

Pour les graphes expandeurs, on obtient que $\lambda_1^{(p)}(X_n) \geq \varepsilon$ pour tout n (avec ε ne dépendant que de p) et $c_p(X_n) \geq \Omega(\log |X_n|) \cdot \left(\frac{\lambda_1^{(p)}(X_n)}{2^{p-1}k} \right)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) Soit C non trivial de $\mathbb{Z}_2^d$, soit $w(C) = \min_{\substack{n \in C \\ n \neq 0}} d_{\text{Ham}}(n, 0)$ le poids de C .

• Alors $\lambda_1^{(2)}(\mathbb{Z}_2^d / C^\perp) = 2w(C)$

• On a l'isomorphisme $C \xrightarrow{n \mapsto \chi_n} \mathbb{Z}_2^d / C^\perp$ et donc $\lambda_1^{(2)}(\mathbb{Z}_2^d / C^\perp) = \min_{\substack{n \neq 0 \\ n \in C}} \sum_{j=1}^d (1 - (-1)^{x_j}) = 2d_{\text{Ham}}(0, n) = 2w(C)$.

Reutilisons Cheeger-Buser. $\lambda_1^{(p)}(\mathbb{Z}_2^d / C^\perp) \geq \left(\frac{2}{d}\right)^{p-1} \left(\frac{w(C)^p}{n} \right) \geq 2 \min_{\substack{n \neq 0 \\ n \in C}} \sum_{j=1}^d x_j = 2d_{\text{Ham}}(0, n) = 2w(C)$ et cela donne une borne inférieure $c_p(\mathbb{Z}_2^d / C^\perp) \geq \Omega(\log |\mathbb{Z}_2^d / C^\perp|) \frac{w(C)}{d} \frac{1}{n^{1/p}}$.

car il existe un code C tel que $w(C) = \Omega(d)$ et donc $C \geq \frac{d}{4}$.

$$= \Omega(d) \text{ car } |\mathbb{Z}_2^d / C^\perp| = \frac{2^d}{2^{\dim C}} = 2^{\frac{d}{4}}$$