

Unitarisation des rep de groupes

Th (Day - Dixmier, 1950) : G groupe moyennable, $C^*(G)$ la C^* -algèbre de G , H espace de Hilbert. Soit π une rep de G sur H : $\pi : G \rightarrow B(H)$ $\pi(t) = \pi(t/t)$
 $\pi(e) = Id$

On dit que π est continue si $\forall x \in H \quad t \mapsto \pi(t)x$ est continue. Alors LASSE :

- (1) π est bornée : $\exists C > 0 \forall t \in G \quad \|\pi(t)\| \leq C$
- (2) $\exists S \in B(H)$ inversible $\forall t \in G \quad S^{-1}\pi(t)S$ unitaire.
- (3) $\exists u : C^*(G) \rightarrow B(H)$ homomorphisme borné "prolongeant" π

N.B. : Le vrai théorème est (1) $\Rightarrow$ (2)

Rappel : G moyennable $\Leftrightarrow \exists m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ état $\forall f \in L^\infty \quad m(1/f) = m(f)$

N.B. : (3) veut dire $\exists C > 0 \forall h \in L^1(G) \quad \left\| \int_G h(t) \pi(t) dt \right\|_{B(H)} \leq C \|h * \cdot\|_{L^1(G)}$

Ex : $G = \mathbb{Z}$: π correspond à donner $T \in B(H)$ inversible : on a alors $\pi(n) = T^n$
 $C^*(\mathbb{Z}) = C(T)$: ainsi (3) devient : $\exists C > 0 \forall (a_n)$ suite finie $\|\sum a_n T^n\| \leq C \sup |a_n|$
 Le théorème ci-dessus dans ce cadre correspond au Th de Nagy (1947) $\|T\| \leq 1$

Que deviennent ces résultats dans le cadre banachique ?

Soit π une rep de G sur un espace de Banach X .

De (2), unitaire n'a pas de substitut banachique; mais on peut énoncer les conditions suivantes :

Exemple : $X = L^p(\mathbb{R})$ et $\pi : \mathbb{R} \rightarrow B(L^p(\mathbb{R}))$
 $t \mapsto f(\cdot - t)$

Pour $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\int h(t) \pi(t) f dt = \int h(t) f(\cdot - t) dt = h * f : L^p \rightarrow L^p$

et (3) signifie que $\exists C > 0 \forall h \in L^1(\mathbb{R}) \quad \|h * \cdot\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C \|h * \cdot\|_{L^1 \rightarrow L^1}$

Or ceci n'est vrai que si $p=2$!

Idee : innocer les questions 2 et 3.

1 est la donnée brute....

Soit (en) suite de Radonnikes, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $F \subset \mathcal{B}(X)$ R-borne, $\text{c'est-à-dire que } \exists K \forall u_1, \dots, u_n \in X \forall T_1, \dots, T_n \in F \exists \varepsilon > 0 \forall (y_j) \in \text{Rad}(X) \forall \sum \varepsilon_j y_j \in K \|\sum \varepsilon_j y_j\|_{\text{Rad}(X)} \leq K \|\sum \varepsilon_j y_j\|_{\text{Rad}(X)}$

Th 1 (1010) : Soit G moyennable et $\pi : G \rightarrow \mathcal{B}(X)$ rep. continue telle que $\pi(t) : t \in G$ ait R-borne. Alors il existe $u : C^*(G) \rightarrow \mathcal{B}(X)$

homomorphisme borné prolongeant π .

N.B. L'hypothèse est fautive pour $\pi : \mathbb{R} \rightarrow L^p(\mathbb{R})$.

Le R2 montre que c'est la bonne hypothèse !

Th 2 Supposons que X possède la propriété (X) (comme L^p , $1 \leq p < \infty$, L^1 et $\mathcal{H}$ de Banach de cotype fini, la propriété absolue pour les espaces aux non-espaces).

$\exists \pi$ tel que $\exists u, \dots$, c'est-à-dire $\exists K > 0 \forall R \in L^1(G) \|\pi(R)\pi(t)\|_{X \rightarrow X} \leq K \|R\|_{L^1(G)} + R$

alors $\{\pi(t) : t \in G\}$ est R-borne.

Ex : $G = \mathbb{Z}$, $X = L^p$. Soit $T \in \mathcal{B}(L^p)$ irréductible : alors $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ R-borne

rapport entre 1 et 2 : Akcouch, Følner, Picard :

Comment rendre une rep. la plus droite possible ? Faire de la diagonale !

Rappelons ce que sont les orthogonaux : (z_i) famille d'espaces de Banach, U orthogonalité unitaire

Pour (m) bornée dans ℓ^2 , on pose $\|z_i\| - \delta_{ij} \|y_j\|$. Puis on quotiente par la norme-norme : pour $N = \{z_i\} : \|z_i\| = 0\}$: on pose $\tilde{z} = \pi z_i / \|z_i\|$

$\exists 1 < p < \infty$ et X Banach, on pose $u(y_i; X) = U$ borné d'espaces du type $L^p(\Omega; X)$. $[N, B : \pi X = G, u(y_i; X)]$ est engendré la classe de tous les L^p

$\{X \text{ d'un r.t.}, u(y_i; X) \text{ et la classe des Hilbert}\}$

Th général : Soit $\pi : G \xrightarrow{\text{repr. continue}} \mathcal{B}(X)$ G moyennable, X réflexif. Considérons

(a) 10 et 11 : dans la classe $u(y_i; X)$, $\pi : G \rightarrow \mathcal{B}(X)$ représentation unitaire, $A : X \rightarrow Y, B : Y \rightarrow X$ bornés (oblique) $\forall t \in G, \pi(t) = B \pi(t) A$

(1) π n'est pas à priori continue, $\forall n \in X, t \mapsto \pi(t) A^n$ n'est continue

$\begin{matrix} X & \xrightarrow{\pi(t)} & X \\ \downarrow A & & \downarrow B \\ Y & \xrightarrow{\pi(t)} & Y \end{matrix}$

Posons $Z = \{ y \in Y : t \mapsto \hat{\pi}(t)y \text{ est continu} \}$: Z contient $\text{Im } A$ et $Z \subset Y \in \mathcal{U}(p, X)$
 Z est invariant...
 On peut alors considérer $\hat{\pi} : G \longrightarrow B(Z)$, $\alpha : X \longrightarrow Z$, $\beta : Z \longrightarrow X$ t.q. $Z \xrightarrow{\hat{\pi}(t)} Z$
 et alors $\hat{\pi}$ est symétrique et continue.
 $X \xrightarrow{\hat{\pi}(t)} X$

Particularisations : G abélien (notamment $G = \mathbb{R}$) et $X = L^p(\mathbb{R})$
 cf Fendler : dilations de semi-groupes, ... Z est 1-complémenté... Z est encore un L^p .
 mais cela nécessite des représentations sont positives ! $Z = L^1(\Sigma)$.

Application. Soit X Banach, $1 < p < \infty$ et $\pi : G \xrightarrow{\text{non nul}} B(H)$ bornée continue.
 Il existe Y dans $\mathcal{U}(p, X)$ et $Z_2 \subset Z_1 \subset Y$ s.e. fermés et $S : X \longrightarrow Z_1/Z_2$
 une isométrie injective
 quelque $\forall t \in G$ $S \hat{\pi}(t) S^{-1} : Z_1/Z_2 \longrightarrow Z_1/Z_2$
 $Y \xrightarrow{\hat{\pi}(t)} Y$ $Z_1 = \overline{\text{vect}} \{ \hat{\pi}(t)A(x) : x \in X, t \in G \}$
 $A \uparrow \downarrow B$ $Z_2 = Z_1 \cap \ker B$: on prend $q : Z_1 \longrightarrow Z_1/Z_2$ quotient et
 $X \longrightarrow X$ $S = q \circ A : X \longrightarrow Z_1/Z_2$: on obtient une compression de $\hat{\pi}, S \hat{\pi}(t) S^{-1}$

$\rightarrow$ cf Th. de Paulsen : Arveson, etc. ... les compressions sont plus fortes que les similarités

2^e application : calcul H^∞ .

O : on part d'un quotient de se de L^p , on y reste

NB : le cas L^1 reste problématique : tout espace est quotient de L^1 .