

≤ maximal et calcul fonctionnel

Soit (X, μ) un espace mesuré et $L_p(X)$, $1 < p < \infty$ et $T: L_p \rightarrow L_p$ positif contractant.
 Plus généralement, T est ^{seulement} "régulier" : $\forall (f_n) \subset L_p \quad \left\| \sup_n T f_n \right\|_p \leq \left\| \sup_n f_n \right\|_p$

On dit que $T \otimes I_{\ell^\infty}: L_p(X; \ell^\infty) \rightarrow L_p(X; \ell^\infty)$ est contractant.

(On a bien positif $\Rightarrow$ régulier). Alors quelque que T admet $L_p(X; E) \rightarrow L_p(X; E)$ est contractant pour tout espace de Banach E .

Soit (T_t) un semigrpse de contractions régulières sur L_p : alors, quelque soit E , (T_t) s'étend à un sg de contractions régulières sur $L_p(X; E)$.

E est un treillis de Banach, p.ex. un treillis de fonctions sur un espace mesuré, $(\Omega, \mathcal{A})$, on peut considérer $f \in L_p(X; E)$ comme f^u de deux variables $(x, \omega) \in X \times \Omega$.

On pose alors $\mathcal{C}f(u, \omega) = \sup_{t \geq 0} \left| [T_t f(\cdot, \omega)](u) \right|$

Théorème 1: Supposons que E soit un treillis UMD et (T_t) un sg analytique sur $L_p(X)$ (on voit qu'alors $E = (L_1, F)$ avec F treillis UMD)
 Conclusion: $\forall f \in L_p(X; E) \quad \left\| \mathcal{C}f \right\|_{L_p(X; E)} \lesssim \left\| f \right\|_{L_p(X; E)}$ (à p. 1 et c. 100)

Histoire: travail classique de Stein (1967): inégalité ergostique:

si $T_t \geq 0$ et $\|T_t\|_{p \rightarrow p} \leq 1$ pour $1 \leq p \leq \infty$ et $T_t 1 = 1$ et $T_t^* = T_t$ sur L_2 .

Ce résultat, sa démonstration, basée sur l'interpolation, ^{T_t analytique sur L_2 et} alors sur L_p pour tout $p \in [1, \infty]$, a été beaucoup simplifié par Cowling (1980): par besoin de positivité ni "auto-adjoint".

Il a aussi considéré $\mathcal{C}_\alpha f(u, \omega) = \sup_{t \in \Sigma_\alpha} \left| [T_t f(\cdot, \omega)](u) \right|$ pour $f \in L_p(X)$ _{à p. 100}

Cette démarche se généralise.

Remarque. Sans analyticité, on peut établir une autre $\leq$ max: Dunford-Schwartz: ^{$\leq$ ergostique maximale}
 (cas, calaire)

$\left\| \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{t} \int_0^t T_s f \right| \right\|_{L_p(X; E)} \leq \left\| f \right\|_{L_p(X; E)}$ (l'inégalité $\left\| \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T_s f \right\| \right\|_{L_p(X; E)}$ est bien facile: non-harmonicité L_p)

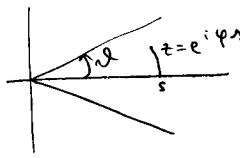
On peut se ramener ^{moyenne ergostique} au groupe de translations sur $\mathbb{R}$ et on aboutit à la f mox de Hardy-Littlewood. Cf. Bourgain, ^{transferts} ₁₉₈₀.

Si $E = L_q$, $q \in [1, \infty]$, on aboutit à une autre $\leq$ célèbre, "Fefferman-Stein" d. Charpentier: $q < p$, puis pour tout $p \dots$

Idee de la preuve: calcul fonctionnel.

Th2: mêmes hypothèses sur (T_t) que dans le Th1; $E = (E_0, E_1)_\eta$ avec $\eta \in]0, 1[$, $E_0 \approx$ Hilbert, $E_1 = \text{UMD}$. Alors ① l'extension de (T_t) à $L_p(X; E)$ est analytique. ② si $T_t = e^{-tA}$, alors A a un calcul fonctionnel H^∞ borné d'angle $\sigma < \frac{\pi}{2}$.

[on a donc réduit un angle $> \frac{\pi}{2}$ à un angle $< \frac{\pi}{2}$] [Ces cdl. sont implicites ds le Th1]

Quelques idées de preuves: Th2 $\Rightarrow$ Th1:  On veut estimer $\sup_{t \in \Sigma_\sigma} \frac{\|T_t\|}{e^{-\sigma t}}$. $\lambda > 0$, " $\lambda = sA$ ".

Soit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ et posons $m(\lambda) = e^{-e^{i\varphi}\lambda} - \int_0^1 e^{-e^{i\varphi}\lambda t} dt$ et $m(v) = m(e^v)$.

Alors $m(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{m}(u) e^{iuv} du$ et $m(\lambda)^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{m}(u) \lambda^{iu} du$ et $m(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{m}(u) s^{iu} A^{iu} du$.

Donc $T_t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{m}(u) s^{iu} A^{iu} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 T_{te} dt$.

Donc on déduit du Th2 que $\|A^{iu}\|_{L(X; E)} \leq e^{-\sigma|u|}$: on a $\|T_t\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{m}(u)| \|A^{iu}\| du + \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^1 \|T_{te}\| dt$.

Maintenant, quel du Th2:

1) $E = (H, E_1)_\eta$, E_1 quelconque. Alors (T_t) est analytique sur $L_p(X; E)$: si (T_t) analytique sur $L_p(H)$, alors (T_t) analytique sur $L_p(X; E_p)$: $\sup_{t \in \Sigma_\sigma} \frac{\|T_t\|_{B(L_p(X; E_p))}}{e^{-\sigma|t|}} \leq C$. D'autre part: $\sup_{t > 0} \|T_t\|_{B(L_p(X; E_p))} \leq 1$. On peut alors interpoler p. des rayons intermédiaires.

Donc $\sup_{t \in \Sigma_\sigma} \|T_t\|_{B(L_p(X; (E_0, E_1)_\eta))} \leq C^\eta$, E_1 pour une valeur convenable de p .

2) Utiliser les f^p carrées. On sait que H^∞ calcul borné d'angle $\sigma \leq \frac{\pi}{2}$ est PIB d'angle σ . Or PIB est stable par interpolation: si A a PIB de σ_0^+ sur F_0 et de σ_1^+ sur F_1 , alors A a PIB de $\sigma^+ = (1-\eta)\sigma_0^+ + \eta\sigma_1^+$ sur $F = (F_0, F_1)_\eta \rightarrow$ Th de Riesz-Thorin.

Calcul H^∞ borné est aussi stable par interpolation.

2 Questions: / mémoire Adversus avec Chu Le Pardy: calcul sg de diffusion symétrique

(petit livre rouge de Stein) 1) le Th2 reste-t-il valable pour E UMD quelconque?

2) Supposons T_t sg de diffusion symétrique (ou markovien). A a-t-il un calcul H^∞ borné d'angle $< \frac{\pi}{2}$ sur $L_p(X; E)$ pour tout $1 < p < \infty$ et tout E UMD?

(cf travaux de K. convexité de Pisier) Etape non triviale, sg de convolutions symétriques... extension analytique.