

Propriété de Kadec-Klee et points fixes.

L'histoire: D'origine russe!

Théorème de B. Ricceri : Si X est un $\mathbb{R}$ -Banach avec la propriété KK, et $f: B_X \rightarrow X^*$ fonction compacte, alors il existe $\tilde{x} \in B_X$ tel que $\langle f(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle = \|f(\tilde{x})\|$.

- f compacte = f continue d'image rel^t compacte : donc, ici, $\|f(n)\|$ est minoré par $\varepsilon > 0$.

- X est l.u.c. si $\forall a \in X, \|a\|=1, \forall (n_k) \subset B_X, \frac{\|a+n_k\|}{2} \rightarrow 1 \Rightarrow x_k \rightarrow a$.

- X a PKK si sur S_X topologie faible et en norme coïncident.

→ l'histoire!

- Considérons $F: n \mapsto \{y \in B_X : \langle f(n), y \rangle = \|f(n)\|\}$
 facile à voir que F est PKK, en norme.

et $\bigcup_{n \in B_X} F(n)$ rel. compact dans B_X ... cuscus...

→ par le th. du point fixe de Ky Fan, il y a un point fixe.

Q: et si on n'a pas la propriété de Kadec-Klee?

- Si X n'est pas réflexif, le th. de James dit qu'il existe $f.l.$ qui n'atteint pas sa norme.

On va donc supposer X réflexif séparable (à la fin, en prenant un quotient, on peut partir d'un X non séparable.)

Soit h convexe sci ≥ 0 nulle en 0 définie sur C convexe fermée.

Alors : soit toute $\mathcal{S}$ suite minimisante de h sont relativement compacte.

soit il existe $\vartheta > 0, a \in C, \gamma: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{liq.}} C, \varphi: X \xrightarrow{\text{cont.}} \mathbb{R}^+$ tels que.

$$(1) \gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a$$

$$(2) \forall b \in X \lim_{t \rightarrow \infty} \|b - \gamma(t)\| > \vartheta$$

$$(3) h \circ \gamma(t) \leq \frac{\vartheta^2}{8} \text{ et } \varphi(\gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

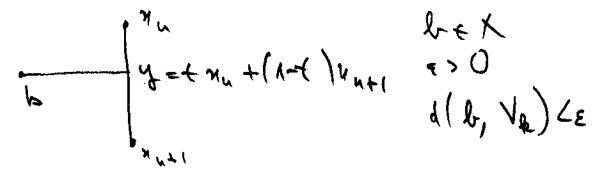
$$(4) \forall n \|n - \gamma \circ \varphi(n)\| > \frac{\vartheta}{2}$$

Construction par récurrence : (a_n) totale, V_n s.e. de dim finie, $x_n \in C$, $\delta_n > 0$,
 $V_n = \text{lin}(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n, \dots, x_{n-1})$, $\delta_n = \sup \{ d(x, V_n) : d(x) \leq 2^{-n} \}$,
 $d(x_n, V_n) \geq \frac{2}{3} \delta_n$, $d(x_n) \leq 2^{-n}$. On a $\delta_n \downarrow$.

- Si $\delta_n \rightarrow 0$, la suite minimisante est relativement compacte

- On peut supposer $C \subset B_X$ par convexité : $\text{diam } C \leq 2$.

- Si $\delta_n \geq \delta > 0$, on peut montrer



$$d(y, V_{n+1}) \geq t \frac{2\delta}{3}$$

$$d(y, b) \geq t \frac{2\delta}{3} - \epsilon \quad \text{si } y \text{ est proche de } x_{n+1}$$

$$d(y, V_n) \geq d(x_n, V_n) - 2t \underset{\text{diam } C}{1}$$

$$d(b, y) \geq \frac{2\delta}{3} - 2t - \epsilon$$

et une moyenne judicieuse : $\|b - y\| \geq \frac{\frac{2\delta}{3} - 2t - \epsilon + (t \frac{2\delta}{3} - \epsilon)}{1 + \frac{t}{2}} = \frac{2\delta^2}{9(1 + \frac{t}{2})} - \epsilon \geq \frac{\delta^2}{5} - \epsilon$

pour la f affine par morceaux telle que $x(n) = x_n$

(On peut d'ailleurs extraire de (x_n) une suite convergant faiblement vers x .)

On a bien $\|x\| \rightarrow 0$: On enlève les premières termes de sorte que $\|x\| \leq \frac{\delta^2}{8}$.

Considérons $G_s = \{x(t) : t \geq s\}$: c'est un fermé

$\chi(x, s) = \min_{t \uparrow \text{ avec } s} (2, d(x, G_s)) - 2 \frac{s+1}{2s+1}$ strictement croissante

$\chi(x, 0) \leq 0 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \chi(x, s) > \frac{\epsilon}{2}$ et d'existence $\psi(s)$ tel que $\chi(x, \psi(s)) = 0$

On a : le graphe de ψ est fermé dans $X \times \mathbb{R}_+$

$\chi(x, s) < 0 \Leftrightarrow s < \psi(s) \quad \text{et} \quad \|x - \gamma \circ \psi(s)\| > \frac{\epsilon}{2}$

Inf-convolution : par changement de norme, on peut supposer que $\|\cdot\|$ est lucratif $\|\cdot\|^*$ aussi.

Alors $\|\cdot\|$ a PKK, est str. convexe et C.

Considérons $q(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$

la convexe sci ≥ 0 , $h(0) = 0$ dans $\mathbb{R}_+$

Considérons $g(x) = \inf \{ h(y) + q(z) : y + z = x, z \geq 0 \}$

Le surgraphe est convexe : donc g est convexe. De plus $g \leq h$ et $g \leq q$

Donc g est loc^t bornée et donc continue.

et $\forall n \exists! (y, z) \quad g(n) = h(y) + q(z) \quad n = y + z$. On va poser $y = \sigma(n)$
 $z = \zeta(n)$

- unicité: $h(y) + q(z - y) \dots$ strictement convexe.

- continuité: y_n, z_n avec $y_n + z_n = n$
 $h(y_n) + q(z_n) \rightarrow g(n)$. On peut supposer que $y_n \rightarrow y = n - z$
 $\sup q(z_n) < \infty$

et $h(y) \leq \liminf h(y_n)$ et $h(y) + q(z) = g(n)$: donc σ et ζ continues faibles.

- Si $x_n \rightarrow x$, $x_n = y_n + z_n$: montrons que $q(z_n) \leq g(x_n)$.

On va supposer que $z_n \rightarrow z$ et $q(z_n) \rightarrow q(z)$ et de $z_n \rightarrow z$
 $y_n \rightarrow y = x - z$ et $g(x) = h(y) + q(z)$.

Donc, par la 1^{re} K^t, $z_n \rightarrow z$ en norme!

Après, g est C^1 : g n'est pas loin de h : une régularisation.

$n = y + z$ (bonne idée), $g(n) = h(y) + q(z)$: $g(n+u) \leq h(y) + q(z+u)$

et $g(n+u) \geq 2g(n) - g(n-u) \geq g(n) + q'(z) \cdot u + o(u) \leq h(y) + q(z) + q'(z) \cdot u + o(u)$

g est différentiable et $g'(n) = q' \circ \zeta(n)$ et $g'(n) = q' \circ \zeta(n)$ et $\|g'(n)\| = \|q'(\zeta(n))\|$

Qu'en déduisons pour h ? $u \mapsto h(n) - \langle g'(n), u \rangle$ atteint son minimum en $\sigma(n)$

$g(n) + g'(n)u \leq g(n+u) \leq h(y+u) + q(z)$

$h(y) + q(z)$

$h(y+u) \geq h(y) + g'(n)u$

N.B.: $\|n - \sigma(n)\| \leq \|\zeta(n)\| = \sqrt{2q(z)} \leq \sqrt{2q(n)} \leq \sqrt{2h(n)}$
 $n = y + z$

Supposons h convexe sa ≥ 0 sans minimum fort. Alors il existe $f: X \rightarrow X^*$ compacte

telle que pour chaque n , $h(n) - \langle f(n), u \rangle$ atteint son minimum en n .

Supposons qu'elle l'atteigne ailleurs: on va utiliser ce qui précède:

γ et γ construits relatifs à g . Si $t = \psi(n)$ et $y = \gamma(t) = \sigma \circ \gamma(t)$, $w = q \circ \gamma(t)$.

Si on regarde $f(n) = w$: le minimum est atteint en $\gamma(t)$.

$\|n - \gamma(t)\| > \frac{\alpha}{2}$ et $\|\gamma(t) - \gamma(t)\| < \frac{\alpha}{2}$.

Alors $\exists K$ injectif et compact de X dans l_2 : $K^*K: X \rightarrow X^*$ et posons
 $f(n) = w + K^*K(y-n)$ et $\langle K^*K(y-n), y-n \rangle = \|K(y-n)\|^2 > 0$.

Revenons au problème de Ricci
de dimension infinie.

Soit X réflexif sans PKK, $a \in S_X$, $x_n \rightarrow a$ avec $\|x_n - a\| \not\rightarrow 0$,
 $a^* \in S_{X^*}$, $\langle a^*, a \rangle = 1$, $Y = \ker a^*$ (espace réflexif!)

et $\pi: X \rightarrow Y$
 $x \mapsto x - \langle a^*, x \rangle \cdot a$ et $C = \pi(B_X)$ convexe faiblement compact.

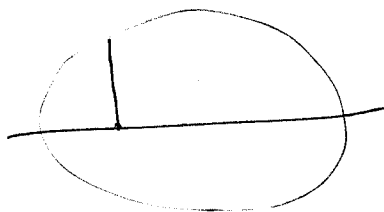
$$s^* = \max \{ s : y + sa \in B_X \}$$

$$\rightarrow y \in C.$$

Alors $y \mapsto s^*$ est concave, on a $s^* \leq 1$.

et $|y| = 1 - s^*$ convexe sci ≥ 0 nul en 0.

et $f: Y \rightarrow Y^*$ et $f(x) = f_{011}(x) + a^*$ et $\|f(x)\| \geq 1$.



Rajout: considérons $f(x) = (-x_1, -\frac{x_2}{2}, \dots, -\frac{x_n}{n}, \dots)$

$\langle f(x), x \rangle < 0$ sur la sphère et $\|f(x)\| > 0$.

Ceci n'est pas respecté dans l'hypothèse de Ricci, c'est que $\|f(x)\|$ ne s'éloigne
loin de 0.