

Cadher: $\mathcal{H}$ espace de Hilbert

K opérateur borné positif sur $\mathcal{H}$.

L'orbite unitaire de K est $U K U^*$, où U est le groupe unitaire.

Considérons alors $\sum K_j$ avec $K_j \in \text{Orb}(K)$.

Si K est une projection, cf. Kadtsal et Ng.

A.B.: notion d'équivalence de Murray et von Neumann: $P \sim Q$ si $\dim P = \dim Q$.

Th. Fillmore fin des années '60) Si $\mathcal{H}$ est de dim finie, A est somme de projections si et seulement si $\text{tr} A$ est entier et $\text{tr} A \geq \text{rg } A$.

cf. aussi les travaux de Spiegel.

Th (Kadtsal, Ng, Zhang 2009). Si $A \geq 0$ et $\text{tr}(A - I)_+ = \infty$, alors A est somme de projections au sens de la topologie forte.

cf. aussi Dykema et al⁰⁴ pour le cas $\|A\|_2 > 1$:

Séries de contractions: Soit K contraction stricte. $\|K h\| < \|h\|$ pour $h \neq 0$.

Th: Si $\{A_n\}_{n \geq 1}$ avec $\|A_n\|_2 \geq 1$ et K contraction stricte avec $0 \in \text{int} \text{sp}_e(K)$

Alors $A = \sum K_j$ avec $\|K_j\|_2 \approx 1$. En fait, c'est une CNS.

outil: Soit $M \in M_{\text{min}}^+$: $M = \begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ s'écrit $M = U \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* + V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} V^*$
pour des unitaires $U, V \in M_{\text{min}}$.

Comparons cela à Fillmore: on s'intéresse à $I_m \oplus 0_n \leq A \oplus 0_n$
i.e; $\lambda_1(\cdot) \leq \lambda_1(\cdot)$, $(\lambda_1 + \lambda_2)(\cdot) \leq (\lambda_1 + \lambda_2)(\cdot)$, etc.

On a le th de Schur Horn: $A \oplus 0 \prec \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ qui s'écrit $U_1 \in U_1^+ + \dots + U_n \in U_n^+$
et cela montre Fillmore.

2^e Technique: Pinching (Bourin '03): $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_i + \dots$ $A \in \begin{pmatrix} A_{\mathcal{H}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{\mathcal{H}_i} \end{pmatrix}$

L'image numérique:

th: Si $W_2(A) \supset \mathcal{D}$ disque unité et $\sup \|X_i\| < 1$, alors existe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_i$
tel que $A_{\mathcal{H}_i} \approx X_i$.

$$(1a) \quad W_e(A) = \bigcap_{C \text{ rang fini}} W(A+C) \text{ et } z \in W_e(A) \text{ si } z = \lim \langle h_n, A h_n \rangle \text{ avec } (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ système orthonormé}$$

Le pt principal était la congruence unitaire.

Lemme : Soit $A \geq 0$ et $\text{rk}(A - I)_+ = \infty$ et $B \neq 0$ positif. Alors $A = \sum B_j$ avec $\text{rk } B_j \sim B$ [ici cela veut dire $B_j = X^* X$ et $B = X X^*$]

Pour généraliser aux a.v.N., pt l'équivalence unitaire n'a pas nécessairement lieu dans l'a.v.N.