

Espace à partitions pondérées

II Propriété PL^p : propriété d'entrelacement classique en géométrie du groupe.

Def. $1 \leq p \leq \infty$. Un groupe localement compact à base dénombrable a PL^p s'il agit proprement par isométries affines sur un espace L^p .

$\alpha: G \rightarrow \text{Isom}(L^p) \cap \text{Aff}(L^p)$: pour $f \in L^p$, $\alpha(g)f = \pi(g)f + b(g)$
et on a un cocycle : $b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g)$.

→ implique les conjectures de Baum-Connes et Novikov

Si $p=2$, PL^2 est la propriété de Haagerup.

I) espaces à murs mesurés et propriété de Haagerup

- on se donne X ensemble et alors un mur de X est une partition $w = \{h, h^c\}$ avec $h \subset X$. Si W est un ensemble de murs, pour $x, y \in X$, soit
 $W(x/y) = \{w = \{h, h^c\} : x \in h \text{ et } y \in h^c \text{ ou vice versa}\}$ ceux qui séparent x de y .

Def. : (X, W) est un espace à murs si pour $x, y \in X$ $\#W(x/y) < \infty$.

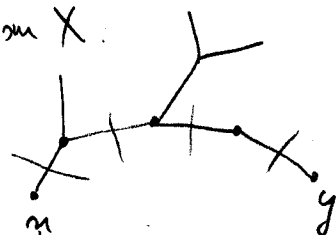
on pose $d_W(x, y) = \#W(x/y)$ pseudodistance sur X .

Exemple : les arbres : si chaque arête est un mur,

$$\mathbb{Z}^2 = \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

$$\text{et } \begin{array}{c} | \cdot | \cdot | \cdot | \\ | \cdot | \cdot | \cdot | \\ | \cdot | \cdot | \cdot | \end{array}$$

les murs sont horizontaux ou verticaux



et d_W est la norme $\|\cdot\|_1$.

Généralisation : on munit W d'une structure d'espace mesuré :

Def. : $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$, où $(W, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, est un espace à murs mesurés si $\mu(W(x/y)) < \infty$ pour $x, y \in X$.

Th (Cherix - Martin - Valette) (Chatterji - Drăutu - Haglund) G a la propriété de
_{discret} _{comp}

Haagerup s'il agit proprement sur un espace à mesure mesurée

② Si $G \curvearrowright (X, W)$, pour $H = \{h \in X : \{h, h^c\} \in W\}$ le demi-espace de X

et $\pi: G \curvearrowright \ell^2(H)$, à $x_0 \in X$ fixe, $\delta(g)(h) = \mathbb{1}_{g \cdot x_0}(h) - \mathbb{1}_{x_0}(h)$
 $= \begin{cases} 0 & \text{si } h \text{ ne separe pas } x_0 \text{ et } g \cdot x_0 \\ \pm 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\|\delta(g)\|^2 = 2\# W(x|y)$$

Pb : stabilité de Haagerup par construction de groupes :

Haagerup est stable par produit direct, libre, amalgamé,
 passage à sous-groupe fermé
 instable par produit semi-direct.

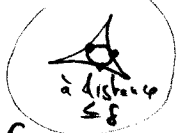
$$H \wr G = \bigoplus_{g \in G} H \rtimes G \quad \text{où } G \text{ agit sur } \bigoplus H \text{ par décalage d'indice.}$$

Th : (Cannulier - Stalder - Valette) $\text{Hob } G \text{ ont Haagerup} \Rightarrow H \wr G \text{ a Haagerup.}$

Q : existe-t-il une structure similaire aux murs pour PL^p ($p \geq 2$)

($p \geq 2$ parce que si G a la propriété de Haagerup, alors sur PL^p pour $p \in [0, +\infty]$
 si G a PL^p pour $p \in [1, 2]$, alors G a Haagerup
 si $2 < p < q < \infty$, on ne sait pas si PL^p implique PL^q .)

Un résultat surprenant de Yu 2005 : si G est de type fini et d'indice hyperbolique, alors il existe $p \geq 2$ tel que G a PL^p



II Espace à partitions pondérées : X ensemble. $p: X \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

induit une partition de X : $x \sim_p y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$, pondérée par la valeur de p sur chaque morceau.

Soit $\mathcal{P}$ une famille de fonctions de $X \rightarrow K$

et $c: X \times X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}, K)$

$$(x, y) \mapsto c(x, y) : p \mapsto p(x) - p(y)$$

Déf. Soit $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ e.v. semi-normé de f sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans K tel que

$$F(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}) / \|\cdot\| = 0 \text{ est un espace de Banach [Penser à } \mathcal{L}^1(\mathcal{P}, \mu) \text{ et } \mathcal{L}^1(\mathcal{P}, \mu)]$$

On dit que $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ est un espace à partitions pondérées si
 $\forall x, y \in X \quad c(x, y) \in F(\mathcal{P})$

(3)

exemple: les espaces à murs mesurés : $\mathcal{P} = \{ \mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ tel que } \{h, h^c\} \in \mathcal{W} \}$
 $F(\mathcal{P}) = L^1(\mathcal{P})$

ex: Les groupes δ -hyperboliques.

Th: Si G est l.c. à base dénombrable,

1) si G agit (proprement) sur un espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$,
 alors G agit ^(proprement) par isométries affines sur un espace de Banach B s.e. fermé
 de $F(\mathcal{P})$.

2) Si G agit proprement par isométries affines sur un Banach B , alors
 $G \curvearrowright_{\text{proprement}} (G, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$, où $F(\mathcal{P}) \cong$ espace fermé de B .
 non aff.

Th: (Hardin) Si G agit par isométries linéaires sur un s.e. fermé de $L^p(X, \mu)$.

avec p non entier pair, alors il existe une action de G par isométries linéaires
 sur $L^p(X', \mu')$ qui "étend" l'action de G sur F : $F \xrightarrow[\text{équivariante}]{} L^p(X', \mu')$

Caractérisation de PL^p : Corollaire: si $1 \leq p \notin 2\mathbb{Z} \setminus \{2\}$.

$G \in PL^p$ si G agit proprement sur $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ avec
 $F(\mathcal{P}) \cong$ s.e. fermé de L^1 .
 non affine
 non linéaire

Th: $1 \leq p \notin 2\mathbb{Z} \setminus \{2\}$. Si $H \in PL^p$ et $G \in Haagerup$, alors $H \wr G \in PL^p$.

$$H \wr G = \bigoplus_{g \in G} H \rtimes G$$

$= W$

Th: pour que le produit $\frac{1}{2}$ direct agisse proprement
 il faut stabilité des partitions!

L'action de G doit laisser stable les partitions
 de W .