

Plongements dans c_0 (d'après Kalton-Lancien ²⁰⁰³)

→ une simplification des arguments.

- 1) Voici les résultats: (M, d) s.e.m. séparable, $\lambda \geq 1$. On dit que $f: M \xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} c_0$ si $\forall x, y \in M \quad d(x, y) \leq \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \lambda d(x, y)$, et strictement si la première inégalité est stricte: $f: M \xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} c_0$.

Théorème (K-L 2003) $\forall M \exists f: M \xrightarrow{2\text{-Lip}} c_0$.

Auparavant, Alaoui (3+ ϵ) et Delaut (3) avaient obtenu des plongements dans c_0^+ .

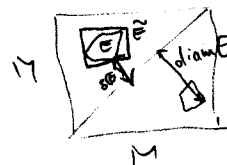
Théorème: $\forall 1 \leq p < \infty \exists f: \ell^p \xrightarrow{2^{1/p}\text{-Lip}} c_0$.

Théorème: M métrique dt bout fermé borné et compact et $\epsilon > 0$: $\exists f: M \xrightarrow{(1+\epsilon)\text{-Lip}} c_0$.

Théorème: $\ell^1 \not\xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} c_0 \forall \lambda < 2$ et plus généralement $\ell_p \not\xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} c_0 \forall \lambda < 2^{1/p}$.

- 2) Une propriété métrique:

Soit $E \subset M \times M$ et $\tilde{E}$ le plus petit paré contenant E .



$$\delta(E) = \inf \{ d(x, y) : (x, y) \in E \}$$

$$\text{diam}(E) = \sup \{ d(x, y) : (x, y) \in E \}$$

Fait: Si $E \subset M \times M$ borné et $P: M \xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} F$ ($\lambda \geq 1$) avec F e.v.n. de dim finie et $\epsilon > 0$ n'est seulement si $\exists E_1, \dots, E_n$ fermés de E recouvrant E tels que

$$\forall n \forall (x, y) \in E_n \quad \|P_x - P_y\| \leq \lambda \delta(\tilde{E}_n) + \epsilon.$$

assemblé: si $E \subset E_1 \times E_2$ et $I < \infty$, $P(E, \text{Id}_I) \subset \bigcup_i F_i$ avec F_i de diamètre $< \frac{\epsilon}{2}$.

$$\text{et puis on prend } E_{jk} = E \cap P^{-1}(F_j) \times P^{-1}(F_k)$$

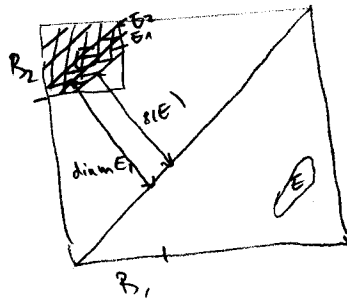
$$\text{avec } (x, y) \in E_{jk} \text{ et } (u, v) \in \tilde{E}_{jk}, \text{ on a } \|P_x - P_y\| \leq \|P_x - P_u\| + \|P_u - P_v\| + \|P_v - P_y\| \leq \lambda d(u, v) + \epsilon.$$

et on prend l'inf sur les (u, v)

Def: $(M, d) \text{ a } \Pi(\lambda)$, $\lambda > 1$ si $\forall B_1, B_2$ boules de M de rayon r_1, r_2 telles que

$$\forall E \subset B_1 \times B_2 \text{ avec } \delta(E) > \lambda(r_1 + r_2) \exists E_1, \dots, E_n \text{ fermés de } E \text{ recouvrant } E \text{ tels que } \forall n \text{ diam}(E_n) < \lambda \delta(\tilde{E}_n).$$

Illustration



Exemple: si les compacts de M sont les fermés bornés, alors $M \in \Pi(1+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exemple: Si M est métrique, $M \in \Pi(2)$: si $x \in B_1, y \in B_2$ et $r_1 + r_2$ tel que $0 < \varepsilon < \delta(E) - 2(r_1 + r_2)$ et (a_n) une subdivision de $[\delta(E), \text{diam}(E)]$ de pas $< \varepsilon$ et que $E_n = \{(x, y) : a_n \leq d(x, y) \leq a_{n+1}\}$, alors:
 $\exists (u, v) \in E_n$, il existe $v' \in B_2$ tel que $(u, v') \in E_n$.
 $\text{diam}(E_n) < \delta(E_n) + \delta(E_n) - 2(r_1 + r_2) \leq 2d(u, v') - 2d(v', v) \leq 2d(u, v)$.
 et en prenant l'inf sur tous les u, v , $\text{diam}(E_n) < 2\delta(E_n)$.

Théorème: Si $M \in \Pi(\lambda)$, alors $\exists f: M \xrightarrow{\lambda\text{-Lip}} \mathbb{R}$ et $M \in \Pi(\mu)$ pour tout $\mu > \lambda$.
 (facile)

Corollaire: Tous les résultats précédents.

Preuve: si M et $U, V \subset M$ et $d(u, U) = \delta(\{u\} \times U)$ et $\delta(U, V) = \delta(U \times V)$
 et $\text{diam}(U) = \text{diam}(U \times U)$.

Lemme 1: si $U, V, F \subset M$, $\varepsilon > 0$, il existe $f: M \xrightarrow{1\text{-Lip}} \mathbb{R}$ tel que

- 1°) $\forall x \in F, |f(x)| \leq \varepsilon$
 - 2°) $\forall u, y \in U \times V, f(u) - f(y) = \min \{ \delta(U, V), \delta(U, F) + \delta(F, V) + 2\varepsilon \}$.
- Preuve: soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} -\delta(V, F) - \varepsilon \leq s \leq 0 \leq t \leq \delta(U, F) + \varepsilon \\ t - s = \min \{ \delta(U, V), \delta(U, F) + \delta(V, F) + 2\varepsilon \} \end{cases}$

On pose $f(u) = \min \{ d(u, U) + t, d(u, V) + s, d(u, F) + \varepsilon \}$

- $\rightarrow$ si $u \in U, f(u) = t$
 - $\rightarrow$ si $y \in V, f(y) = s$
 - $\rightarrow$ si $x \in F, |f(x)| \leq \varepsilon$
- et $f(u) - f(y) = t - s$.

Lemme 2: Si $M \in \Pi(\lambda)$, $\lambda > 1$ et $F \subset G$ et fini et $0 < \alpha < \beta$, posons

$A(G, \alpha) = \{(u, y) \in M \times M : \lambda [d(u, G) + d(y, G) + \alpha] \leq d(u, y)\}$. Alors
 il existe net $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n \subset M$ tels que $\forall (u, y) \in A(G, \alpha) \setminus A(F, \beta)$

$\exists n, d(u, y) < \lambda \min \{ \delta(U_n, U_n), \delta(U_n, F) + \delta(V_n, F) + 2\beta \}$

Dém du théorème: Prenons $f_n: M \xrightarrow{1-L} \mathbb{R}$ tels que $\forall (x,y) \in M^2 \exists n \text{ tel que } d(x,y) < \frac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{n}$
 $\forall x \in M \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ (3)

Alors $f = \lim (f_n)$ converge

Considérons une densité dans M : $F_n = \{a_1, \dots, a_{k_n}\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$

et $E_n = A(F_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \setminus A(F_n, \varepsilon_n)$

- Par le lemme 2, il existe $n_1 < n_2 < \dots$ et $U_n, V_n \subset M$ tels que $\forall (x,y) \in E_n$

$\exists n_n \leq n < n_{n+1}$ $(x,y) \in U_n \times V_n$ et $d(x,y) < \lambda \min \{ \delta(U_n, V_n), \delta(U_n, F_n) + \delta(V_n, F_n) \}$

- Par le lemme 1, il existe $f_n: M \xrightarrow{1-L} \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in F_n \forall n_n \leq m < n_{n+1}$ $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n$

et $n_n \leq m < n_{n+1}$, $(x,y) \in U_n \times V_n$, $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \varepsilon_n$

si $x \neq y$, posons $\sigma_n = \lambda [d(x, F_n) + d(y, F_n) + 2\varepsilon_n]$ $d(x,y) < \sigma_n$ et $\sigma_n \downarrow 0$

il existe donc k tel que $\sigma_k \leq d(x,y) < \sigma_{k+1}$ et si $(x,y) \in E_n$, il existe

$n_n \leq m < n_{n+1}$ tel que $d(x,y) < \lambda (|f_m(x) - f_m(y)|)$: si $n \leq n_n$, $f_n(x) \rightarrow 0$

Si $\varepsilon > 0$, il existe j tel que $d(x, a_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $n > j$ tel que $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $n \geq n_n$, $|f_n(x)| \leq d(x, a_n) + |f_n(a_n)| < \varepsilon$

Analogie du lemme 2: si $(x,y) \in A(G, \alpha)$, $\lambda [d(x, G) + d(y, G)]$

il existe B bon de M tel que $A(G, \alpha) \subset B \times B \leq d(x,y) \leq d(x, G) + d(y, G) + \text{diam } G$
 et un recouvrement de B par $B_1, \dots, B_m$ finis tels que $\forall x, x' \in B_j \forall a \in G$
 $|d(x, a) - d(x', a)| < \frac{\alpha}{4}$

Or G fini: $\exists a_j \in G$ $d(B_j, a_j) = \delta(B_j, G)$
 et $d(x, a_j) \leq \delta(B_j, G) + \frac{\alpha}{4} = \delta(B_j, G) + \frac{\alpha}{4}$ et $B_j \subset \overline{B}(a_j, r_j)$

$E_{jk} = E \cap (B_j \times B_k) \subset \overline{B}(a_j, r_j) \times \overline{B}(a_k, r_k)$

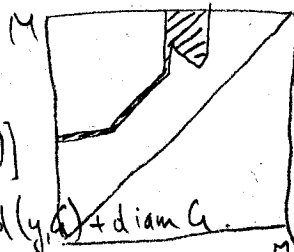
et $\delta(E_{jk}) > \lambda(r_j + r_k)$: si $(x,y) \in E_{jk}$, $d(x,y) > \lambda(d(x, G) + d(y, G) + \alpha)$
 $> \lambda[\delta(B_j, G) + \delta(B_k, G) + \alpha]$

et $\exists N \exists E_1, \dots, E_N$ recouvrant E tels que

$\forall (x,y) \in E \exists n, j, k$ $(x,y) \in E_n \subset B_j \times B_k$

et $d(x,y) < \text{diam } E_n \leq \lambda \delta(E_n) = \lambda \delta(U_n, V_n)$

Donc $d(x,y) < \lambda(d(x, F) + d(y, F) + \alpha) \leq \lambda(\delta(B_j, F) + \delta(B_k, F) + \frac{\alpha}{2} + \beta)$



Supposons qu'il existe $f: M \xrightarrow{\lambda-Lip} \mathbb{R}$ $f = (f_i)$ $P = (p_i)_{i \leq i_0}$ $Q = (q_i)_{i \geq i_0}$ ④

$E \subset B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2)$ et il existe tel que $\|Q_{a_1} - Q_{a_2}\| < \varepsilon$.

Pour $(u, y) \in E$, $\|Q(u) - Q(y)\| \leq \|Q(u) - Q(a_1)\| + \|Q(a_1) - Q(a_2)\| + \|Q(a_2) - Q(y)\|$
 $\leq \lambda(r_1 + r_2) + \varepsilon < \delta(\varepsilon)$ pour ε bien choisi

$$\leq d(u, y)$$

$$\leq \|f(u) - f(y)\|$$

$$= \max \{\|p_u - p_y\|, \|q_u - q_y\|\}$$

$$= \|p_u - p_y\|$$

Comme on a en dimension finie, $\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tel $\forall (u, y) \in E_n$ $d(u, y) < \|f_u - f_y\| < \delta(\varepsilon_n)$
 donc $\varepsilon_n \leq \lambda \delta(\varepsilon_n) + \varepsilon < \mu \delta(\varepsilon_n) + \varepsilon$

!! 00N0A

!