

Thibault Pellon
avec Hamza Valette
et Bachir Bekla

Actions affines irréductibles

Def: Une action affine isométrique d'un groupe G et un homomorphisme $\alpha: G \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ = espace de Hilbert.

Ex: L'application $\alpha(g)v = \pi(g)v - b(g)$ où $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ représentation unitaire
où $b: G \rightarrow \mathcal{H}$ satisfait $b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g)$ (G -cocycle)

Ex: si $v \in \mathcal{H}$, $g \mapsto \pi(g)v - v$ et un 1-cocycle: on l'appelle cobord.

- Prop. 1) Les orbites de l'action α définie par π et b sont bornées
2) b est un cobord
3) l'action possède un point fixe.

Def: Une action affine α est irréductible si $\mathcal{H}$ est le seul, α -invariant fermé
 $\alpha(G)$ -invariant.

Ex: si la partie linéaire π de α est triviale, alors b est un homomorphisme de G dans $(\mathcal{H}, +)$. α est irréductible ssi $b(G)$ est totale [l'e.v. engendré est dense].

$\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$

- 2) Si π est irréductible, alors α est irréductible si elle est non bornée, car les sous-espaces affines $\alpha(G)$ -invariants sont toujours // à des sous-espaces linéaires $\pi(G)$ -invariants.

Proposition: Sont équivalentes $\alpha = (\pi, b)$

- 1) α irréductible
- 2) si $v \in \mathcal{H}$, le cocycle $b + \mathbb{Z}v$ est total.
- 3) Pour toute décomposition de $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$, le cocycle projeté b_0 est non borné
- 4) Toute action projetée (π_0, b_0) est irréductible.

Lemme de Schur: ^{On dit} Def: On dit qu'un opérateur affine $A: v \mapsto Tv + t$ est dans le commutant, de α si $\alpha(g)A = A\alpha(g)$

$$[\Leftrightarrow T\alpha(g) = \alpha(g)T \text{ et } (T-1)b(g) = 2t]$$

Théorème: α est irréductible si les opérateurs dans le commutant sont des translations, de plus elles sont dans la direction de $\pi(a)$

Preuve: $\Rightarrow$ la projection sur un s.e. invariant est dans le commutant.

$\Leftarrow$ On peut supposer T autoadjoint

① Si $T \neq 1$, il existe $\lambda \neq 1$ valeur spectrale de T . On considère un intervalle

$$I \ni \lambda \text{ et } E_I \text{ le projecteur spectral associé.}$$

On note qu'il existe un espace affine invariant orthogonal à E_I .

Corollaire: Les seules actions irréductibles de groupes abéliens sont données par des translations.

- le centre $Z(G)$ d'un groupe agit par translation dans la direction de
- le groupe résiduel agit de façon irréductible unique $\pi(a)$ pour translation.

Remarque: On a démontré que π définit une action irréductible de partie linéaire π , dans $\pi T \neq \pi(a)$, $(T-1)[b](g) = 0 \Leftrightarrow T=1$
dans le H^1 de la cohomologie

On dit que $[b]$ est un vecteur séparateur pour le $\pi(a)$ -module:

$$H^1(G, \pi) = \{\pi\text{-cycles}\} / \{\pi\text{-cobords}\}$$

En particulier, si $\pi = \lambda_a$, $\lambda_a(a)' = R(a)$ et on a l'isomorphisme

$$H^1(G, \lambda_a) = H^1_{(2)}(G).$$

Proposition: Soit $t > 0$, soit G groupe discret non moyennable ICC (et donc $L(G)$ est un facteur) et soit Π_t l'unique $R(G)$ -module de $R(G)$ -dimension t et λ_t la rep. unitaire associée.

Il existe une action affine irréductible de partie linéaire λ si $\beta_1^{(1)}(G) \neq 0$.

Démo: $(t=1)$: λ est un vecteur séparable pour le $R(G)$ -module $H^1(G, \lambda_G)$ et on sait qu'un tel vecteur existe si $\dim_{R(G)} H^1(G, \lambda_G) \geq 1$

$(t \neq 1)$: $\dim_{\lambda_t(G)} H^1(G, \lambda_t) = \frac{\beta_1^{(1)}(G)}{t}$

Prop [Thom] Si G moyennable, alors il existe des sous-espaces affins invariants pour l'action affine de partie linéaire λ_G de "dimension arbitraire".

Prop : Soit G l.c. et $T \leq G$ fermée $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit cocomp} \\ \text{soit de covolume fin.} \end{array} \right.$
 Si α est une action irréductible de G , alors $\alpha|_T$ reste irréductible

La somme de deux actions irréductibles peut être irréductible :

Prop : si α_1 et α_2 sont irréductibles, alors $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ est réductible s'il existe β_1 (resp. β_2) des actions projetées de α_1 (resp. α_2) qui sont équivalentes (enclavées par un opérateur affine inversible borné.)

Corollaire : π fixe, irréductible, $[b_1], \dots, [b_k]$ de π -cocycle lin. indép.
 l'action $(\pi, b_1) \oplus \dots \oplus (\pi, b_k)$ est irréductible

* si π_1 et π_2 sont disjoints, alors si (π_1, b_1) et (π_2, b_2) sont irréductibles, $(\pi_1, b_1) \oplus (\pi_2, b_2)$ l'est aussi.

"somme non redondante"

Proposition : Soit G localement compact et T un réseau

(compact) non moyennable dans G . $\hat{G}_T = \{\sigma \in \hat{G} \text{ som-rep de } \lambda_G\}$.
 $\beta_1^{(1)}(T) \geq \frac{1}{\text{covol}(T)} \sum_{\sigma \in \hat{G}_T} \dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \sigma)$

Si $T \leq G$ et $\beta_1^{(1)}(G) = \text{covol}(T) \beta_1^{(1)}(T)$ (c'est un invariant!)

théorème [Valette-Petersen] : Pour G de type $\mathbb{I}$, unimodulaire, séparable.

$\beta_1^{(1)}(G) = \sum_{\sigma \in \hat{G}_d} d_{\sigma} \dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \sigma) + \int_{\hat{G}_d} d_{\omega} \dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \omega) d\omega$
 (les rep. rég. sont comme δ_0)

cf. Négatif.