

Distance entre algèbres d'opérateurs.

Th de Banach-Stone (1937): Soit $T: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ isométrie linéaire surjective. Alors T est de la forme $T(f) = u(f \circ \tau)$ avec $u \in C(K_2, \mathbb{T})$ et $\tau: K_2 \xrightarrow{\text{homéomorphisme}} K_1$.
Donc $C(K_1)$ et $C(K_2)$ sont $*$ -isomorphes.

Def: Posons $d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T: X \xrightarrow{\sim} Y \}$.

Th (Amin Gaubert '66): Si $d(C(K_1), C(K_2)) < 2$, alors $C(K_1) = C(K_2)$ $*$ -isomorphisme.
indépendants.

- 2 est optimal.

- (dite: $\text{Ext}(B_{C(K)}^*) = \pi \{ \delta_k : k \in K \}$ et $\| \delta_k - \delta_l \| = 2$)

Q: existe-t-il des distances de norme strictement entre 1 et 2.

Généralisation recherchée: A, B C^* -algèbres uniales: si $d(A, B) < 1 + \varepsilon_0$ a-t-on $A = B$ $*$ -isomorphes?

Non: l'hypothèse d'hyperfaiblesse: Kadison SI a montré que si

$T: A \rightarrow B$ isométrie linéaire surjective, alors $\exists u \in U(B) \exists J: A \rightarrow B$ isomorphisme de Jordan tel que $T(a) = u J(a)$

↳ c'est-à-dire que J préserve $*$ et le produit $a \cdot b = \frac{ab + ba}{2}$.

Alain Connes a construit en 1975 deux algèbres de von Neumann linéairement isométriques mais non $*$ -isomorphes (En fait, Mer 119.)

Def: Posons $d_{cb}(X, Y) = \inf \{ \|T\|_{cb} \|T^{-1}\|_{cb} : T: X \xrightarrow{\sim} Y \}$

Th1 (avec Eric Ricard 2003): M algèbre de vN et B C^* -algèbre.

Si $d_{cb}(M, B) < 1 + 2 \cdot 10^7$, alors $M = B$ $*$ -isomorphisme.

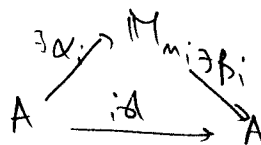
Contre-exemple: C^* -algèbres non séparables.

Th2: A C^* -algèbre nucléaire séparable. Si $d_{cb}(A, B) < 1 + 3 \cdot 10^{-19}$, alors B C^* -algèbre

$A = B$ $*$ -isomorphisme.

(2)

La nucléarité exprime que $\exists C > 0$



$$\|\alpha\|_{cb} \|\beta\|_{cb} \leq C$$

$$\|\beta \circ \alpha\|_{cb} (a) = \|a\| \rightarrow 0$$

Outil. la distance de Kadison - Kastler (1972): $A, B \subset B(H)$

$$d_{KK,H}(A, B) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : \begin{array}{l} \forall x \in B_A \exists x' \in B_B \|x - x'\| < \epsilon \\ \forall x \in B_B \exists y \in B_A \|y - x\| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Conjecture: Si $d_{KK,H}(M, N) < \epsilon$, alors $M = N \otimes \text{somme}$

Th (CSSWW'202) c'est le cas si A C^* -algèbre nucléaire séparable
 B C^* -algèbre

Th 3. Si A, B C^* -algèbres, $d_{KK}(A, B) \leq K \sqrt{\ln d_{cb}(A, B)}$.

$$\text{où } d_{KK}(A, B) = \inf_{\substack{\pi: A \rightarrow B(H) \\ \rho: B \rightarrow B(H)}} d_{KK,H}(\pi(A), \rho(B)).$$

$$= \inf_{\pi, \rho} \sup_m d_{KK, \ell_2^m \otimes H}(\text{id}_{M_m} \otimes \pi(A), \text{id}_{M_m} \otimes \rho(B)).$$

Exemples concrets: $d_{cb}(L(\mathbb{F}_n), L(\mathbb{F}_m)) < 2^{10}$.

Th (Barry Johnson 1977) A algèbre de Banach avec les cohomologies de Hochschild $H^1(A, A) = H^3(A, A) = 0$ Alors $\exists \delta, C > 0 \forall m: A \otimes A \rightarrow A$ multiplication avec $\|m - m_A\| < \delta$, alors $\exists \phi: (A, m) \rightarrow (A, m_A)$ $\phi(m(u, v)) = m_A(\phi(u), \phi(v))$ avec $\|\phi - \text{id}_A\| \leq C\|m - m_A\|$.

On considère L^n les op. n -linéaires bornés $A^n \rightarrow A$ et $f^n: L^n \rightarrow L^{n+1}$ par $f^n(t)(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_1 T(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{h=1}^n (-1)^h T(a_1, \dots, a_h, a_{n+1}, \dots, a_{n+1})$ et on pose $H^n = \frac{\ker f^n}{\text{im } f^{n-1}}$ sachant que $f^n \circ f^{n-1} = 0$. (On a $H^1(A, A^*) = 0 \Leftrightarrow A$ nucléaire).

Th (Christensen - Sinclair): $H_{cb}^1(M, M) = 0$.

Si $L: M \rightarrow N$, $\|L\|_{cb} \|L^{-1}\|_{cb} < 1 + \epsilon$, $L(1)$ est inversible: posons $S(x) = L(1)^{-1} L(x)$ qui satisfait $S(1) = 1$. On définit une nouvelle multiplication sur M par $m(x, y) = S^{-1}(S(x)S(y))$.

On a alors $\|m - m_M\|_C \leq \|S^{-1}\|_C \|\check{S}\|_C$ où $\check{S} : M \times M \rightarrow N$
 et donc $M = N$ * isomorphe.
 (un $y \mapsto S(x_y) - S(y)$)

Q: Ya-t-il une version Lipschitz

Ex d'hypothèse: $f : M \rightarrow N$ $\|Id_{M_2} \circ f\|_{L_p} \|Id_{M_2} \circ f^{-1}\|_{L_p} < 1 + \epsilon$.